Arab Gulf J. Scient. Res., **9**(1), pp. 153 (1991)

Smoothness of the Singularity for the Heat Equation in a Polygonal Domain (Part Two)

Boubaker - Khaled Sadallah

Department of Mathematics, E.N.S.
16050 - Kouba, Algiers, Algeria

ABSTRACT. We continue our study of the heat equation with Cauchy - Dirichlet conditions in the non convex polygonal domain Ω, described by the time variable t and one space variable x.

The second member f of the heat equation is in $L^2(\Omega)$, the space of functions the squares of which are integrable in Ω. We look for the solution u in a non symmetric Sobolev space $\mathbf{H}^{r,2r}(\Omega)$ defined as an interpolation space between $\mathbf{H}^{1,2}(\Omega)$ and $L^2(\Omega)$ where $\mathbf{H}^{1,2}(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) : u'_t, u'_x, u''_x \in L^2(\Omega)\}$.

It is known (Sadallah 1976, 1983) that u is smooth (*i.e.* belongs to $\mathbf{H}^{1,2}(\Omega)$) when the domain Ω is convex, but in general, this does not hold in a non convex polygon. The First Part of this work (Sadallah 1989) was devoted to the special case in which Ω is a non convex domain and is the product of two rectangles. It had been proved there, that for all f in $L^2(\Omega)$ there exist two functions v, w such that u = v + w where $v \in \mathbf{H}^{1,2}(\Omega)$ and $w \notin H^{1,2}(\Omega)$. Our main result was:

$$\text{The singularity } w \in \mathbf{H}^{r,2r}(\Omega) \text{ iff } r < \frac{3}{4}.$$

In this second part, we prove that the same result remains unchanged in the general case (*i.e.* when Ω is not necessary product of two rectangles).

The proof uses the First Part of this work and some other results of the author (Sadallah 1976) as well as the interpolation theory.

References

Adams, R. (1975) Sobolev Spaces, Academic Press, New York.

Azzam, A. (1980) Smoothness properties of solutions of mixed boundary value problems for elliptic equations in sectionally smooth n - dimensional domains. *Annales Polonici Mathematici*, **40**(1): 81-93.

Azzam, A., Kreyszig, E. (1980) On parabolic equations in n space variables and their solutions in regions with edges, *Hokkaido Math. Journ.* **9**(2): 140-154.

Bergh, J., Löfström, J. (1976) Interpolation spaces, *An Introduction*, Springer-Verlag, Berlin.

Besov, O.V. (1967) The continuation of function in L_p^1 and W_p^1, *Proc. Steklov Inst. Math.* **89:** 5-17.

Grisvard, P. (1967) Caractérisation de quelques espaces d'interpolation, *Arch. Rational Mech. Anal.* **25**(1): 40-63.

Grisvard, P. (1975) Behaviour of the solution of an elliptic boundary value problem in a polygonal or polyhedral domain, *Num. Sol. of Part. Diff. Equa.* (3), Bert - Hubbard, Academic Press, 207-274, New York.

Lions, J.L., Magenes, E. (1968) Problèmes aux limites non homogènes et applications, **1,2:** Dunod, Paris.

Moussaoui, M.A., Sadallah, B.K. (1984) Regularity results in the propagation of singularity for some evolution equations in a plane polygonal domain, *Proc. First. Intern. Conf. Math. Gulf Area*, 273-287.

Sadallah, B.K. (1976) Régularité de la solution de l'équation de la chaleur dans un domaine plan, *Boll. Uni. Math. Ital.* **5**(13-B): 32-54.

Sadallah, B.K. (1983) Etude d'un problème 2m - parabolique dans des domaines plans non réctangulaires, *Boll. Uni. Math. Ital.* **6**(2-B): 51-112.

Sadallah, B.K. (1989) Smoothness of the singularity for the heat equation in a polygonal domain, Part I, *Arab Gulf Journ Scient. Res.* (in Arabic), 7(2): 1-17.

Triebel, H. (1978) Interpolation theory, Function Spaces, Differential Operators, North Holland.

(Received 19/09/1989;
in revised form 30/10/1990)

ملاحظة: إن أهم ما تنص عليه النظرية ١٣ هو التكافؤ ٢) الذي يبيّن أن العدد r (المحدد لصقالة الأجزاء الشاذة) لا يتعلق بقياس الزوايا في Ω التي تُظْهِر أجزاء شاذة. سنواصل، في القسم الثالث من هذا البحث، دراسة الأجزاء الشاذة باعتبار الطرف الثاني من معادلة الحرارة (المسألة (P)) في فضاءات سوبولافية غير متناظرة بدلاً من الفضاء $L^2(\Omega)$.

تاريخ إستلام البحث: ١٩/٠٩/١٩٨٩ م
تاريخ إعداده النهائي للنشر: ٣٠/١٠/١٩٩٠ م

وتبيّن بفضل ذلك أن صقالة كل هذه الدوال الشاذة هي بالضبط صقالة U_s .

من هذهِ الخاصية يتضح أننـا لا نغيّر صقـالة هـذه الدوال إذا مـا استبدلنـا في تعريف المضلعات E وَ G, E', F الضلع المحمـول على المنصف الأول للمعلم بضلع محمـول على أي مستقيم آخـر يشمل مـركز المعلم وميله مـوجب، أو استبدلنـا في المضلعين G, E' الضلع المحمول على المنصف الثاني بضلع محمـول على أي مستقيم آخر يشمل مركز المعلم وميله سالب .

وهكـذا نكون، بـدراستنا للمضلعـات السالفـة الذكـر، قد استـوفينا جميـع الحالات الممكنة . وبذلك نستطيع الآن تقديم النتيجة الـرئيسية في هـذا البحث، وهي النتيجة التي تضع القضايا والنتائج المـبرهنة في الفقـرات الثلاث السـابقة في صيغة عامة .

ليكن Ω مضلعا كيفيا وَ P العـدد الطبيعيّ (الخـاص بـ Ω) الذي أدخـل لدى تقديم النظرية 1 .

نظرية ١٣ : توجد P دالة $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \ldots, \bar{u}_p$ معرفة على Ω بحيث :

١) مؤثر الحرارة L تشاكل من

$$H_c^{1,2}(\Omega) \oplus IR\,\bar{u}_1 \oplus IR\,\bar{u}_2 \oplus IR\,\bar{u}_3 \oplus \ldots \oplus IR\,\bar{u}_p \quad \text{في} \quad L^2(\Omega)$$

٢) $\forall i = 1,2,\ldots,P : \bar{u}_i \in H^{r,2r}(\Omega) \Leftrightarrow r < \frac{3}{4}$.

حيث $H^{r,2r}(\Omega)$ هو الفضاء المعرف بالإستقطاب (العلاقة ٤) من الفقرة ٤ .

٣) من أجـل كل $i = 1,2,\ldots,P$ تـوجد نقـطة واحدة S_i (هي إحـدى زوايا Ω) بحيث :

$$\bar{u}_i \in H^{1,2}(\Omega\setminus v_i)$$

مهما كان الجوار v_i لِـ S_i .

من جهة أخرى، يتضح من القضية ٨ والعلاقات ٢٠ أن :

$$\begin{cases} \tilde{A}_{S|T_1} \in H^{1,2}(T_1) \\ \tilde{A}_{S|E} \in H^{r,2r}(E) \\ \tilde{A}_{S|\gamma_2''} = A_{S|\gamma_2''} \end{cases} \qquad (٢٢)$$

ينتج من (٢١)، (٢٢) أن $\tilde{A}_s \in \mathbf{H}^{r,2r}(F)$. وبذلك يتم برهان القضية ١١ .

تقدم النتيجة التالية حالة الشكل (١٠) (الفقرة ٢).

نتيجة ١٢ : ليكن G المضلع $F \cup T_2$ حيث :

$$T_2 = \{(t,x) \in \mathbb{R}^2 : 0 < t < 1, \; -1 < x < -t\}$$

توجد دالة $\tilde{B}_s$ معرفة على G بحيث :

١) L تشاكل من $\mathbf{H}_c^{1,2}(G) \oplus \mathbb{R}\tilde{B}_s$ في $L^2(G)$.

٢) $\tilde{B}_s \in \mathbf{H}^{r,2r}(G) \Leftrightarrow r < \frac{3}{4}$

حيث $\mathbf{H}^{r,2r}(G)$ هو الفضاء المعرف بالاستقطاب (العلاقة (٤)).

يتم البرهان على هذه النتيجة إنطلاقاً من القضية ١١ بالطريقة التي استخلصنا بها النتيجة ١٠ من القضية ٩ . ونلاحظ هنا أن $\tilde{B}_s$ هو امتداد B_s، المعرف في برهان النتيجة ١٠ ، إلى المثلثين T_1 ونظير T_1 بالنسبة إلى محور الفواصل.

٨ ـ النتيجة الرئيسية :

نلاحظ في كل ماسبق أن مسألة تحديد صقالة الجزء الشاذ $(\tilde{B}_s, B_s, \tilde{A}_s, A_s, a_s)$ قد رُدَّت كلها إلى صقالة الجزء الشاذ U_s في المضلع R (المشكل من جداء مستطيلين).

وهذا ممكن (انظر Grisvard 1967) حسب نظريات الأثر (Trace Theorems) .

قضية ١١ : إن L تشاكل من $\mathbf{H}_c^{1,2}(F) \oplus IR\,\widetilde{A}_s$ في $L^2(F)$ ولدينا :

$$\tfrac{3}{4} > r \Leftrightarrow \mathbf{H}^{r,2r}(F) \ni \widetilde{A}_s$$

حيث $\mathbf{H}^{r,2r}(F)$ هو الفضاء المعرف بالإستقطاب (العلاقة ٤ من الفقرة ٤) .

البرهان : ليكن $L^2(F) \ni f$. يتبينّ من العلاقات (١٦)، (١٧)، (١٩) أنه إذا وضعنا :

$$\widetilde{u}_R = \begin{cases} u_R \text{ in } E \\ \omega - \alpha\widetilde{A}_s \text{ in } T_1 \end{cases}$$

فإن $\widetilde{u}$ المعرفة بالعلاقة (١٩) تكتب على الشكل : $\widetilde{u} = \widetilde{u}_R + \alpha\,\widetilde{A}_s$ وتحقق $L\widetilde{u} = f$.

ثم إن $\mathbf{H}_c^{1,2}(F) \ni \widetilde{u}_R$ بفضل (١٧)، (١٨)، (٢٠) وهو مايبين أن L تشـاكل من $\mathbf{H}_c^{1,2}(F) \oplus IR\,\widetilde{A}_s$ في $L^2(F)$.

لإثبات أن $\mathbf{H}^{r,2r}(F) \ni \widetilde{A}_s$ إذا وفقط إذا كان $\frac{3}{4} > r$ ، نفرض أولاً أن $\frac{3}{4} \leqslant r$

ومنه فإنه $\mathbf{H}^{r,2r}(E) \not\ni \widetilde{A}_s = \widetilde{A}_{s|E}$. إذن $\mathbf{H}^{r,2r}(E) \not\ni \widetilde{A}_s$. نفترض الآن بأن $\frac{3}{4} > r$. لمـا كان (حسب العلاقة ٤) .

$$H^{r,2r}(T_1) = [H^{1,2}(T_1),\ L^2(T_1)]_{1-r}$$

فإن خواص الاستقطاب تستلزم أن :

$$H^{1,2}(T_1) \subset H^{r,2r}(T_1) \qquad (٢١)$$

إذن يكتب u على الشكل :

$$u = u_R + \alpha A_s \qquad (١٧)$$

حيث $u_R \in \mathbf{H}_c^{1,2}(E)$.

نعلم (Crisvard 1967) أن مقصـــور عنـــاصر $\mathbf{H}_c^{1,2}(E)$ عـــلى الضلع γ_2'' (المـــوازي للمحور (0x)) ينتمي إلى $\mathbf{H}_o^1(\gamma_2'')$. كما نعلم (سعد الله ١٩٨٩) أن u ينتمي إلى $\mathbf{H}^{1,2}$ خارج أي جوار للضلع γ. وبما أن $u_{s|\gamma_2''} = a_{s|\gamma_2''} = A_{s|\gamma_2''}$ فإن $A_{s|\gamma_2''} \in \mathbf{H}_o^1(\gamma_2'')$.

وعليه يأتي من (١٧) : $u_{|\gamma_2''} \in \mathbf{H}_o^1(\gamma_2'')$.

وقد بيّنا (Sadallah 1976) من جهة أخرى أن المسألة :

$$(P_4) \begin{cases} L\omega = f_{|T_1} \\ \omega_{|\gamma_2''} = u_{|\gamma_2''} \in H_0^1(\gamma_2'') \\ \omega_{|\partial T_1 - \gamma''} = 0 \end{cases}$$

تقبل حلاً وحيداً ω يحقق : $\omega \in \mathbf{H}^{1,2}(T_1)$ (١٨)

نعرف الآن الدالة $\tilde{u}$ على F كالتالي :

$$\tilde{u} = \begin{cases} u \text{ in } E \\ \omega \text{ in } T_1 \end{cases} \qquad (١٩)$$

حيث ω هـو حل المسـألة (P_4) المنتمي إلى $\mathbf{H}^{1,2}(T_1)$. نمـدد بعد ذلـك الدالـة A_s إلى المثلث T_1 بحيث نحصل على دالة $\tilde{A}_s$ تحقق الشروط التالية :

$$\begin{cases} \tilde{A}_{S|T_1} \in H^{1,2}(T_1) \\ \tilde{A}_{S|\partial T_1 - \gamma_2''} = 0 \\ \tilde{A}_{S|\gamma_2''} = A_{S|\gamma_2''} \end{cases} \qquad (٢٠)$$

إن النتيجة (Corollary) التالية مهمة في حد ذاتها، وإضافة إلى ذلك سنحتاجها لدراسة حالة الشكل (١٠) .

نتيجة ١٠ : ليكن E' المضلع $E \cup T'$ حيث :

$$T' = \{ (t,x) : 0 < t < \tfrac{1}{2}, -1 < x < -t \}$$

توجد دالة B_s معرفة على E' بحيث :

1) L تشاكل من $\mathbf{H}^{1,2}_c(E) \oplus \mathbb{R} B_s$ في $L^2(E)$

2) $B_s \in \mathbf{H}^{r,2r}(E) \Leftrightarrow r < \frac{3}{4}$.

البرهان: نطبق القضية ٩ في المضلع $R_1 \cup T'$ (مثيل E) فيتبيّن وجود دالة C_s معرفة على $R_1 \cup T'$ بحيث:

- L تشاكل من $\mathbf{H}^{1,2}_c(R_1 \cup T') \oplus \mathbb{R} C_s$ في $L^2(R_1 \cup T')$.
- $C_s \in \mathbf{H}^{r,2r}(R_1 \cup T') \Leftrightarrow r < \frac{3}{4}$.
- $u_s = C_{s|R_1}$.

عندئذ للحصول على النتيجة ١٠ ، يكفي أن نضع :

$$B_s = \begin{cases} u_s & \text{in } R_1 \\ a_s & \text{in } T \\ C_{s|T'} & \text{in } T' \end{cases}$$

إن B_s المعرفة بهذا الشكل تحقق الشروط المطلوبة

٧ ـ المسألة (P) في المضلع F:

ليكن $f \in L^2(F)$. لدينا $f_{|E} \in L^2(E)$. ومنه يأتي، بناء على القضية ٩ ، وجود $u \in \mathbf{H}^{1,2}_c(E) \oplus \mathbb{R} A_s$ بحيث :

$$Lu = f_{|E} \tag{١٦}$$

مع الملاحظة أن :

$$u_{0|\gamma} = (u_1 - \alpha\,\psi)_{|\gamma}$$
$$= \varphi - \alpha\,(1 - x)$$

وبالتالي

$\mathbf{H}^{1,2}(E) \ni u_R$. ومنه $\mathbf{H}^{1,2}_c(E) \ni u_R$.

أما التكافؤ :

$$\frac{3}{4} > r \Leftrightarrow \mathbf{H}^{r,2r}(E) \ni A_s$$

فهو يأتي من تعريف A_s (العلاقة ١٤) ومن كون $\mathbf{H}^{r,2r}(T) \ni a_s$ إذا وفقط إذا كـان $r <$ $\frac{3}{4}$ ، وذلك حسب القضية ٧ .

قضيـة ٩ : إن مؤثر الحـرارة L تشاكـل من $\mathbf{H}^{1,2}_c(E) \oplus IR\,A_s$ في $L^2(E)$ حيث A_s الدالة المعرفة بالعلاقة (١٤) والتي تحقق :

$$\frac{3}{4} > r \Leftrightarrow \mathbf{H}^{r,2r}(E) \ni A_s \qquad (١٥)$$

البرهان : نلاحظ أن مجموعة الوصول للمؤثر L هي $L^2(E)$ لأن : $L(\mathbf{H}^{1,2}_c(E)) \subset$ $L^2(E)$ ولأن العلاقتين (١٠) وَ (١٤) وتعريف u_s (الفقرة ٣) تُثبت أن :

$$L\,a_s = \mathcal{L}\,u_s = (x' - 1)(1 + t')\,D_{x'}u_s \in L^2$$ وَ

$$L\,A_s = \begin{cases} L\,a_s & \text{in } T \\ L\psi & \text{in } R_1 \end{cases}$$

ومنه $L^2(E) \ni L\,A_s$

من جهــة أخـرى، نثبت أن L متبــاين من $\mathbf{H}^{1,2}_c(E) \oplus IR\,A_s$ في $L^2(E)$ بفضـل الشروط الحدية (Boundary Conditions) . كما تبين القضية ٨ أن L غامر (Surjective) . ومنه المطلوب .

يتبين من (١٢) وَ (١٣) أن $H^{r,2r}(T) \ni a_s$ إذا وفقط إذا كان $\frac{3}{4} > r$ لأننا نعلم (سعد الله ١٩٨٩) أن $H^{r,2r}(C) \ni u_s$ إذا وفقط إذا كان $\frac{3}{4} > r$. وبذلك ينتهي برهان القضية ٧ .

نعرّف الآن دالة (شاذة) في E ، نسميها A_s ، كالتالي :

$$A_s = \begin{cases} a_s & \text{in } T \\ \psi & \text{in } R_1 \end{cases} \qquad (١٤)$$

حيث ψ الدالة المعرفة في الفقرة ٣ . نستطيع عندئذ تقديم النتيجة التالية :

قضية ٨ : من أجل كل $L^2(E) \ni f$ يوجد عدد حقيقي α بحيث يكتب حل المسألة (P) على الشكل :

$$u = u_R + \alpha A_s$$

علماً أن :

$$H_c^{1,2}(E) \ni u_R$$

$$\frac{3}{4} > r \Leftrightarrow H^{r,2r}(E) \ni A_s \, .$$

البرهان : يكفي أن نضع :

$$u_R = \begin{cases} u_1 - \alpha\psi & \text{in } R_1 \\ u_0 & \text{in } T \end{cases}$$

حيث : u_1 حل المسألة (P_1) (المنتمي إلى $H^{1,2}(R_1)$) .

ψ الدالة المعرفة في الفقرة ٣ .

u_0 الدالة الواردة في القضية ٧ .

البرهان : كنا قد عرّفنا في بداية هذه الفقرة تبـديلاً للمتغـير ρ من C في T . إن التطبيق العكسي ρ^{-1} لِـ ρ هو :

$$\rho^{-1} : C \rightarrow T$$

$$(t'x') \longrightarrow \rho^{-1}(t'x') = (t,x) = \left(\left(\frac{t'}{1+t'}, \frac{x'+t'}{1+t'}\right) \right)$$

نلاحظ أن المسألة (P_3) تتحول بواسطة ρ^{-1} إلى المسـألة (P_2) . وعليـه نرى بنـاء على القضية ٦ والعـلاقات (١٠) وَ (١١) ، أن u_2 المعـرف بِـ (١٠) حل للمسـألة (P_2) .

ثم إنه من السهل التـأكد من أن $u_0 \in \mathbf{H}^{1,2}(T)$ لأن $v_0 \in \mathbf{H}^{1,2}(C)$ حسب القضيـة ٦

من جهة أخرى، فإن المؤثر J :

$$J : L^2(C) \longrightarrow L^2(T)$$

$$u \longrightarrow J(u) = v$$

حيث $v = uo\rho$ (أي $u(t'x') = v(t,x)$) مؤثر خطي مستمر(Linear and Continuous). كما أن مقصوره J_1 خطي مستمر من $\mathbf{H}^{1,2}(C)$ في $\mathbf{H}^{1,2}(T)$. إن هذه المعطيات مضـافة إلى كون $\mathbf{H}^{r,2r}(C)$ وَ $\mathbf{H}^{r,2r}(T)$ فضاءي إستقطاب (الفقرة ٤) تستلزم أن J_1 خـطي مستمر من $\mathbf{H}^{r,2r}(C)$ في $\mathbf{H}^{r,2r}(T)$. ومنه :

$$J(\mathbf{H}^{r,2r}(C)) \subset \mathbf{H}^{r,2r}(T)$$

والواقع أن J تقابل ($J^{-1}v = vo\rho^{-1}$) . إذن :

$$\begin{cases} J(\mathbf{H}^{r,2r}(C)) = \mathbf{H}^{r,2r}(T) \\ J^{-1}(\mathbf{H}^{r,2r}(T)) = \mathbf{H}^{r,2r}(C) \end{cases} \qquad (١٢)$$

نلاحظ أن لدينا :

$$Ju_s = a_s \qquad (١٣)$$

ولما كان $\omega_0 \in \mathbf{H}^{1,2}(R)$ فإن $\omega_{0|c} \in \mathbf{H}^{1,2}(C)$. وبذلك نحصل بوضع $\omega_{0|c} = v_0$ على :

$$
\begin{aligned}
v_{0|\gamma} &= v_{|\gamma} - \alpha\, U_{s|\gamma} \\
&= \omega_{|\gamma} - \alpha\,(1-x) \\
&= \varphi - \alpha\,(1-x)
\end{aligned}
$$

وهو ماينهي برهان القضية ٦ .

إستناداً إلى القضية ٦ ، نعرف الدوال a_s, u_0, u_2 على T بالشكل التالي :

$$
\left\{
\begin{aligned}
u_2(t,x) &= v(t',x') \\
u_0(t,x) &= v_0(t',x')\ ,\ \forall (t,x) \in T,\ \forall (t',x') \in C \\
a_s(t,x) &= u_s(t',x')
\end{aligned}
\right. \qquad (١٠)
$$

نستنتج من (١٠) والقضية ٦ أن :

$$
\left\{
\begin{aligned}
u_{2|\gamma} &= v_{|\gamma} = \varphi \\
u_{0|\gamma} &= v_{0|\gamma} = \varphi - \alpha\,(1-x)
\end{aligned}
\right. \qquad (١١)
$$

حيث α هو العدد الثابت الوارد في القضية ٦ .

قضية ٧ : تقبل المسألة (P_2) حلا وحلها هو u_2 المعرف في (١٠) الـذي يكتب على الشكل :

$$u_2 = u_0 + \alpha\, a_s$$

علماً أن :

$$u_0 \in \mathbf{H}^{1,2}(T)$$

$$a_s \in \mathbf{H}^{r,2r}(T) \Leftrightarrow r < \frac{3}{4} .$$

حيث u_s هي الـدالـة المعـرفـة في الفقــرة ٣ . $v_0 \ni \mathbf{H}^{1,2}(C)$ وَ $v_{0|\gamma} = \varphi - (1-x)$ وَ α ثـابت حقيقي .

البرهان : نضع :

$$g = \begin{cases} \mathcal{L}u_1 & \text{in } R_1 \\ g_2 & \text{in } C \end{cases}$$

حيث u_1 هو حل المسألة (P_1) وَ g_2 هو الوارد في العلاقات (٦) . لدينا وضوحاً :

$\mathcal{L}u_1 \ni L^2(R_1)$ لأن $u_1 \ni \mathbf{H}^{1,2}(R_1)$

كـما أن $g_2 \ni L^2(C)$. إذن $g \ni L^2(R)$. لكن النظريـة ٣ تنص على أن $\mathcal{L}$ تشـاكل من $\mathbf{H}_c^{1,2}(R) \oplus IR\, U_s$ في $L^2(R)$. وبالتالي (لاحظ أن $g \ni L^2(R)$) يوجد $\mathbf{H}_c^{1,2}(R) \oplus IR\, U_s$ $\omega \ni$ بحيث $\mathcal{L}\omega = g$. ومنه تكتب ω على الشكل :

$$\omega = \omega_0 + \alpha\, u_s \qquad (٧)$$

حيث $\omega_O \ni \mathbf{H}_c^{1,2}(R)$. ثم إن :

$$\begin{cases} \mathcal{L}\omega_{|R_1} = g_{|R_1} = \mathcal{L}u_1 \\ \omega_{|\varphi R_1 - \gamma_0} = 0 \end{cases}$$

إن لهذه المسألة في R_1 حلا وحيدا . ولما كان u_1 حلا لها فإن $\omega_{|R_1} = u_1$.وبالتالي :

$$\omega_{|\gamma} = u_{1|\gamma} = \varphi \qquad (٨)$$

كما أن المساواة $\mathcal{L}\omega = g$ تستلزم :

$$\begin{cases} \mathcal{L}\omega_{|c} = g_2 \\ \omega_{|\gamma} = \varphi \,,\ \dot{\omega}_{|\gamma_2} = 0 \end{cases} \qquad (٩)$$

ينتج من (٩) أن للمسألة (P_3) حلا هو $v = \omega_{|c}$. وعليه يأتي من (٧) :

$$v = \omega_{|c} = \omega_{0|c} + \alpha\, U_{s|c}$$
$$= \omega_{0|c} + \alpha\, U_s$$

نهتم الآن بالمسألة (في T) :

$$(P_2) \quad \begin{cases} Lu_2 = f_2 \\ u_{2|\gamma} = \varphi \,,\; u_{2|\gamma_2' \cup \gamma_2} = 0 \end{cases}$$

ونجري تحويلا للمتغير (Change of variables) من T في C معرفا كما يلي :

$$\rho : T \longrightarrow C$$

$$(t,x) \longrightarrow \rho\,(t,x) = (t', x') = \left(\frac{t}{1-t}, \frac{x-t}{1-t} \right)$$

ونضع ، من أجل كل (t,x) في T :

$$\begin{cases} u_2\,(t,x) = v\,(t', x') \\ f_2\,(t,x) = g_2\,(t', x') \\ \varphi\,(x) = \varphi\,(x') \end{cases} \qquad (٦)$$

لاحظ أن $(0,x) = (0,x')$، وهو ما يبرر المساواة الأخيرة في (٦) .

عندئذ تصبح المسألة (P) المطروحة في T تكافيء المسألة التالية المطروحة في (C) :

$$(P_3) \quad \begin{cases} \mathcal{L}v = g_2 \in L^2\,(C) \\ v_{|\gamma} = \varphi \,,\; v_{|\gamma_2'} = 0 \end{cases}$$

حيث $\mathcal{L}$ هو المؤثر المعرف في الفقرة ٥ ، إذ أن تحويل المتغير ρ يحول L إلى $\mathcal{L}$.
إذن :

$$\mathcal{L} = (1+t')^2\, L + (x'-1)\,(1+t')\, D_{x'}$$

قضية ٦ : تقبل المسألة (P_3) حلا v يكتب على الشكل :

$$v = v_0 + \alpha\, u_s$$

تنتج هذه التوطئة باعتبار التركيب :

$$D_x : \mathbf{H}_c^{1,2}(R) \oplus IR\, U_s \longrightarrow \mathbf{H}^{r,2r}(R) \xrightarrow{D_x} L^2(R)$$

حيث أن التطبيق الأول (التباين القانوني) مستمـر والتطبيق الثـاني متراص حسبَ التوطئة ٤ .

إذن D_x متراص من $\mathbf{H}_c^{1,2}(R) \oplus IR\, U_s$ في $L^2(R)$.

برهـان النظريـة ٣ :

للحصول على نتيجة النظرية ٣ ، يكفي أن نلاحظ بأن معامـلي (Coefficients) D_x وَ L في عبارة المؤثر $\mathcal{L}$ محدودان وأن النظرية ٢ تنص على أن L تشاكل. كما تنص التوطئة ٥ على أن D_x موثر متراص.

ولما كانت إضافة مؤثر متراص تحافظ على التشاكلات فـإن L تشاكـل بوصفـه مجموع مؤثرين أحدهما تشاكل والآخر متراص.

٦ ـ المسألة (P) في المضلع E :

لدراسة المسألة (P) في المضلع E، نعتـبر عنصرا f من $L^2(E)$ كيفيا ونثبّتـه. ثم نضع $f_{|R_1} = f_1$ وَ $f_{|T} = f_2$. لدينا بداهة $f_1 \in L^2(R_1)$ وَ $f_2 \in L^2(T)$.

نعلم أن للمسألة (في R_1) :

$$(P_1) \quad \begin{cases} Lu_1 = f_1 \\ u_{1|\varphi R_1 - \gamma_0} = 0 \end{cases}$$

حلا وحيداً $u_1 \in \mathbf{H}^{1,2}(R_1)$. وبالتالي فإن مقصورها $u_{1|\gamma}$ الذي نرمز لـه بِـ φ ينتمي إلى $\mathbf{H}^2(\gamma)$ وَ $\varphi(0,1) = 0$ (انظر Grisvard 1967) .

حيث U_s هي الدالة المعرفة في الفقرة ٣ .

ليكن $\mathcal{L}$ المؤثر المعرف بِـ :

$$\mathcal{L} = (1 + t)^2 L + (x - 1)(1 + t)D_x$$

حيث L مؤثر الحرارة وَ D_x مؤثر الإشتقاق بالنسبة لِـ x .

نظرية ٣ : إن المؤثر $\mathcal{L}$ تشاكل من $\mathbf{H}^{1,2}_c(R) \oplus IR\, U_s$ في $L^2(R)$.

يحتاج البرهان على هذه النظرية إلى توطئتين (Lemmas) :

توطئة ٤ : المؤثر D_x متراص (Compact) من $\mathbf{H}^{r,2r}(R)$ في $L^2(R)$، وذلك من أجل $r > \frac{1}{2}$.

البرهان : بما أن R يحقق خاصية «القرن» لِـ بسوف فإن التطبيق :

$$D_x : \mathbf{H}^{r,2r}(R) \longrightarrow \mathbf{H}^{\varepsilon,2\varepsilon}(R) \quad ، \quad \varepsilon = r - \frac{1}{2}$$
$$u \longrightarrow D_x(u)$$

معرف ومستمر .

ثم إن R محدود، وبالتالي فإن التباين القانوني (Canonical Injection) متراص من $\mathbf{H}^{\varepsilon,2\varepsilon}(R)$ في $L^2(R)$ كلما كان $\varepsilon > 0$ ، (انظر Besov 1967) . ولما كان $r > \frac{1}{2}$ فإن $\varepsilon > 0$. وهكذا نرى أن D_x تركيب تطبيقين أحدهما مستمر والآخر متراص . إذن D_x متراص من $\mathbf{H}^{r,2r}(R)$ في $L^2(R)$ من أجل $r > \frac{1}{2}$.

توطئة ٥ : إن D_x مؤثر متراص من

$\mathbf{H}^{1,2}_c(R) \oplus IR\, U_s$ في $L^2(R)$ من أجل $r \in \left] \frac{3}{4} ، \frac{1}{2} \right[$.

إننا نستطيع وضع $2r = s$ في العلاقة (٢) فنحصل على :

$$H^{r,2r}(\Omega) = \{ u_{|\Omega} : u \in H^{r,2r}(IR^2) \} \qquad (٥)$$

إن هذه العلاقة تعرف أيضاً $H^{r,2r}(\Omega)$ تماما، وعليه، فمن الأهمية بمكان أن نعرف ما إذا كان الفضاء $H^{r,2r}(\Omega)$ الذي حصلنا عليه في (٤) هو نفسه الذي حصلنا عليه في (٥).

إن الجواب عن هذا السؤال يتوقف على شكل السّاحة Ω : فإذا كانت هذه الساحة تتمتع بخاصية التمديد (Continuation) المتعلقة بالفضاء $H^{1,2}(\Omega)$ فإن العلاقتين (٤) وَ (٥) تعطيان نفس الفضاء $H^{r,2r}(\Omega)$. أما إذا كانت خاصية التمديد غير محققة فيحدث أن يختلف الفضاءان المذكوران، لكن $H^{r,2r}(\Omega)$ المعرف بِـ (٥) محتوى دوما في $H^{r,2r}(\Omega)$ المعرف بِـ (٤)، (انظر Sadallah 1976). تُعرَفُ خاصية التمديد هذه بخاصية «القرن» لِـ بسوف (Horn Property of Besov)، وهي تُقابِل خاصية «المخروط» (Cone Property) التي تضمن التمديد في فضاءات سوبولاف المتناظرة. بخصوص خاصية «القرن» (انظر Besov 1967).

نشير إلى أن خاصية «القرن» محققة في كل من المضلعات E, R, R_1, C. وبالتالي فإن $H^{r,2r}(\Omega)$ المعرف بِـ (٤) يطابق $H^{r,2r}(\Omega)$ المعرف بِـ (٥) في المضلعات السابقة. أما في المضلع F فخاصية «القرن» غير محققة لأن المثلث لا يتمتع بهذه الخاصية (انظر Sadallah 1976) [وعليه فإن $H^{r,2r}(F)$ الذي سيرد ذكره في الفقره ٧ هو ذلك المعرف بالعلاقة (٤)].

٥ ـ المسألة (P) في المضلع R :

لدينا النتيجة التالية المبرهنة في (سعد الله ١٩٨٩) :

نظرية ٢ : إن مؤثر الحرارة L تشاكل من $H^{1,2}(R) \oplus IR\, U_s$ في $L^2(R)$، ولدينا التكافؤ :

$$\frac{3}{4} > r \Leftrightarrow H^{r,2r}(R) \ni U_s$$

• إذا كان r وَ s عددين موجبين فإن فضاء سوبولاف غير المتناظر $H^{r,s}_{t,x}(IR_t, IR_x)$ ، الذي نكتبه اختصاراً $H^{r,s}(IR^2)$ هو، تعريفا :

$$H^{r,s}(IR^2) = \{ u \in L^2(IR^2) : [(1+\xi^2)^{r/2} + (1+\tau^2)^{s/2}]\, \hat{u}(\xi,\tau) \in L^2(IR^2) \} \qquad (1)$$

حيث يرمز $\hat{u}$ لتحويل فوريي لِـ u .

لاحظ أنه في حالة r = s فإن الفضاء $H^{r,s}(IR^2)$ يصبح فضاء سوبولاف المتناظر المألوف $H^{r}(IR^2)$ (المعروَف مثلا في Adams 1975) .

• إذا كـان Ω جزءاً من IR^2 فـإننا نعـرف $H^{r,s}(\Omega)$ بالإقتصـار (Restriction) أي بوضع :

$$H^{r,s}(\Omega) = \{ u_{|\Omega} : u \in H^{r,s}(IR^2) \} \qquad (2)$$

• يمكننـا أيضـاً تعـريف $H^{r,s}(\Omega)$ بشكـل آخـر يتمثـل في استخـدام نـظريـة الاستقـطاب (Bergh, Löfström 1976, Triebel 1978) ويتم ذلـك بـوضـع (انـظر Lions, Magenes 1968) :

$$H^{r,s}(\Omega) = [H^{r/1-\theta,\, s/1-\theta}(\Omega), L^2(\Omega)]_\theta \qquad (3)$$

حيث يرمز الطرف الأيمن لفضاء الإستقطاب ذي الدليـل θ∈]0,1[بين الفضـاءين $H^{r/1-\theta,\, s/1-\theta}(\Omega)$ وَ $L^2(\Omega)$.

إن مـا يهمنـا هنـا هـو أن نضـع في العـلاقـة (٣) : s = 2 r وَ θ = 1 - r . نجـد عندئذ :

$$H^{r,2r}(\Omega) = [H^{1,2}(\Omega), L^2(\Omega)]_{1-r}, \forall r \in]0,1[\qquad (4)$$

إن العـلاقـة (٤) تعـرف الفضـاء $H^{r,2r}(\Omega)$ تمـامـاً لأن طـرفهـا الأيمن فضـاء استقطاب بين فضاءين معرفين جيداً هُمَا $H^{1,2}(\Omega)$ وَ $L^2(\Omega)$.

• حـول الدوال :

u_s هي الدالة حل المسألة الحدية التالية في المضلع C :

$$\begin{cases} Lu_s &= 0 \\ u_{s|\gamma} &= 1 - x \\ u_{s|\gamma'_2} &= 0 \end{cases}$$

وهي تساوي :

$$u_s(t,x) = \beta \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\pi} e^{-(n\pi)^2 t} . \operatorname{Sin} n\pi x$$

حيث β ثابت (انظر سعد الله ١٩٨٩).

نرمز بـ $\mathbf{H}^1_0(\gamma_0)$ للفضاء $\mathbf{H}^1_0(\gamma_0) = \{ u \in L^2(\gamma_0) : u' \in L^2(\gamma_0) , u(0,1) = u(0,-1) = 0 \}$

لتكن θ دالـــة من $\mathbf{H}^1_0(\gamma_0)$ تحـقق $\theta(x) = 1 - x$ مـن أجـــل كـــل $x \in \gamma$. تـــوجـــد (Grisvard 1967) دالة ψ من $\mathbf{H}^{1,2}(R_1)$ بحيث $\psi_{|\gamma_0} = \theta$ و $\psi_{|\partial R_1 - \gamma_0} = 0$.

نعرف الدالة U_s على R بوضع :

$$U_s = \begin{cases} u_s & \text{in } C \\ \psi & \text{in } R_1 \end{cases}$$

٤ ـ فضاءات سوبولاف غير المتناظرة :

عرّفنا في المقدمة الفضــاءات $L^2(\Omega)$ ، $\mathbf{H}^{1,2}(\Omega)$ ، $\mathbf{H}^{1,2}_c(\Omega)$، حيث Ω مضلع من $\mathbb{R}^2$. ونضيف هنـا تعـاريف بعض فضـاءات سـوبــولاف التي تلبي حـاجتنـــا في الفقرات التالية :

$$\mathbf{H}^1(\Omega) = \{ u \in L^2(\Omega) : D_t u, D_x u \in L^2(\Omega) \}$$

• إذا كان $I =]A, B[$ مجالاً فإن :

$$\mathbf{H}^1_0(I) = \{ u \in H^r(I) : u(A) = u(B) = 0 \}$$

T = شبه المنحرف $\{ (t,x) \in IR^2 : 0 < t < \frac{1}{2} , t < x < 1 \}$.

$\gamma = \{0\} \times]0,1[$.

$R = R_1 \cup C \cup \gamma$.

$E = R_1 \cup T \cup \gamma$.

T_1 = المثلث $\{ (t,x) \in IR^2 : \frac{1}{2} < t < 1 , t < x < 1 \}$.

$F = E \cup T_1$.

- حـول الأضـلاع :

$\gamma_1 = \{-1\} \times]-1,1[$.

$\gamma_1' =]-1,0[\times \{-1\} \cup]-1,0[\times \{1\}$.

$\gamma_1'' = \{0\} \times]-1,0[$.

$\gamma_0 = \gamma \cup \gamma''$.

$\gamma_2 = \{ (t,t) \in IR^2 : 0 < t < \frac{1}{2} \}$

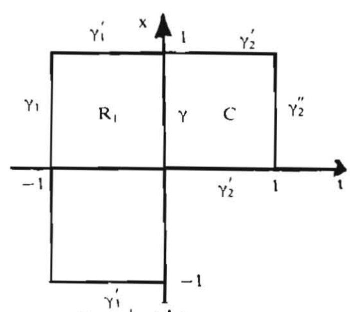
$\gamma_2' =]0,1[\times \{0\} \cup]0,1[\times \{1\}$ عندما يتعلق الأمر بـ E .

$=]0,1[\times \{1\}$ عندما يتعلق الأمر بـ E .

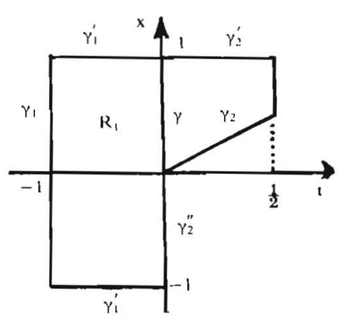
$\gamma_2'' = \{1\} \times]0,1[$ عندما يتعلق الأمر بـ R .

$= \{\frac{1}{2}\} \times]0,1[$ عندما يتعلق الأمر بـ E .

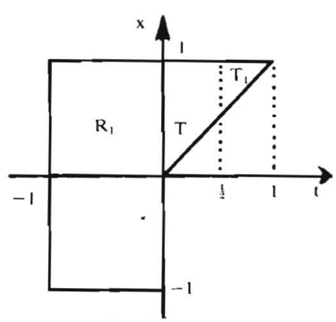
$\partial \Omega$ = حافة المضلع Ω



المضلع R
الشكل (١١)



المضلع E
الشكل (١٢)



المضلع F
الشكل (١٣)

ينتج مما سبق أنه يكفي دراسة ثلاث حالات هي :

١) المضلع (٦)، وهو موضوع الفقرة ٦ .

٢) المضلع (٨)، وهو موضوع بداية الفقرة ٧ .

٣) المضلع (١٠)، وهو موضوع آخر الفقرة ٧ .

والواقع أننا سنبرهن أن لجميع الحلول الشاذة نفس الصقالة، وأن هذه الصقالة هي بالضبط تلك التي حصلنا عليها في حالة الشكل (٥) (سعد الله ١٩٨٩).

وللمقارنة، نشير إلى أنه خلافاً للحلول الشاذة التي تظهر في بعض المسائل مثل معادلة لابلاس (Grisvard 1975) والمعادلات الناقصية (Elliptic Equations) [أنظر مثلاً Azzam 1980] ومعادلة الحرارة في IR^3 (Moussaoui, Sadallah 1982) والمعادلات المكافئية في IR^n (Parabolic Equations) [أنظر مثلاً : Azzam, Kreyszig 1980] فإن الفضاء الذي تنتمي إليه الحلول الشاذة هنا لا يتوقف على قياس الزوايا، مع التذكير بأن وجود تلك الحلول يتوقف على الموقع الهندسي في Ω للزوايا الأكبر من π .

سنستعمل في البراهين المقدمة بصفة خاصة نتيجة القسم الأول (سعد الله ١٩٨٩)، وننبه إلى أن هناك صعوبات ستظهر بسبب اعتبارنا لساحة Ω غير نظامية بالنسبة لفضاءات سوبولاف غير المتناظرة، سِيّما مسألة تمديد (Continuation) عناصر هذه الفضاءات. ولهذا السبب سنلجأ إلى استخدام نظرية الاستقطاب (Interpolation Theory) .

٣ ـ ترميزات (Notations) :

تفاديا للتكرار، ندخل في هذه الفقرة ترميزات سنتبناها في كامل الفقرات التالية :

- حول المضلعات (في مَعْلَم (Coordinate System) متغيراه (t,x)) :

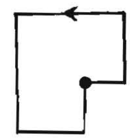
C = المربع $]0,1[\times]0,1[$.

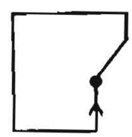
R_1 = المستطيل $]-1,1[\times]-1,0[$.

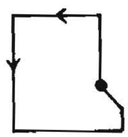
من جهة أخرى، فإن عدد أضلاع المضلعات التي تظهر حلاً شاذاً واحداً لا يهمنا في هذه الدراسة. ولذا سنعتبر هذا العدد أصغر ما يمكن، وبالتالي ستكون المضلعات التي سندرسها خماسية (أي ذات خمس أضلاع).

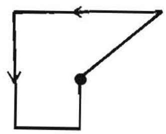
ثم إن الأضلاع التي لا تحيط بالزاوية الأكبر من π (أي الزاوية التي يظهر بسببها الحل الشاذ) لا تلعب أي دور في هذه الدراسة، وعليه سنختارها موازية لأحد المحورين (قصد الاختصار).

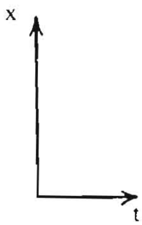
بمراعاة الملاحظات والخواص السابقة يتبين أنه يكفي دراسة مسألتنا في المضلعات المبيّنة أدناه باعتبار الزاوية الأكبر من π في مركز الإحداثيات.

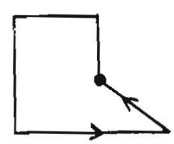

الشكل (٥)

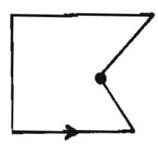

الشكل (٦)

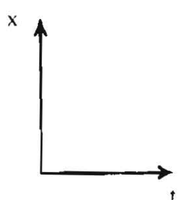

الشكل (٧)


الشكل (٨)




الشكل (٩)


الشكل (١٠)



نشير إلى أن الشكل (٥) قد تمت دراسته في القسم الأول (سعد الله ١٩٨٩) كما أننا ننتقل من الشكل (٦) إلى الشكل (٧) ومن الشكل (٨) إلى الشكل (٩) بإستبدال x بـ x - وبالتالي فإن دراستي الشكلين (٦) وَ (٧) متماثلتان، وكذلك الأمر فيما يخص الشكلين (٨) وَ (٩).

نلاحظ أن L تشاكل (Isomorphism) من $\mathbf{H}_c^{1,2}(\Omega)$ في $L^2(\Omega)$ عندما يكون Ω محدبا (لأن $P = L$ في هذه الحالة). وتظل هذه النتيجة قائمة حتى في بعض المضلعات غير المحدبة. ذلك ما تبيِّنه النظرية السابقة (انظر مثلا الشكل (٢)).

تنص النظرية ١ على أنه توجد P دالة $(\bar{u}_i)_{i=1,\dots,P}$ من $L^2(\Omega)$ لا تنتمي إلى $\mathbf{H}^{1,2}(\Omega)$ تولد فضاء V بعده P بحيث يكون L تشاكلا من $\mathbf{H}_c^{1,2}(\Omega) \oplus V$ في $L^2(\Omega)$. وهذا يعني أن حل معادلة الحرارة يكتب على شكل مجموع دالتين إحداهما في $\mathbf{H}^{1,2}(\Omega)$ والأخرى ليست في $\mathbf{H}^{1,2}(\Omega)$ بل في V.

نسمي عناصر V حلولا (أو أجزاء) شاذة (Singular) لأنها لا تنتمي إلى الفضاء الطبيعي $\mathbf{H}^{1,2}(\Omega)$.

وهكذا يتضح من النظرية ١ أن ظهور الأجزاء الشاذة يتوقف على الموقع الهندسي للزوايا الأكبر من π في Ω.

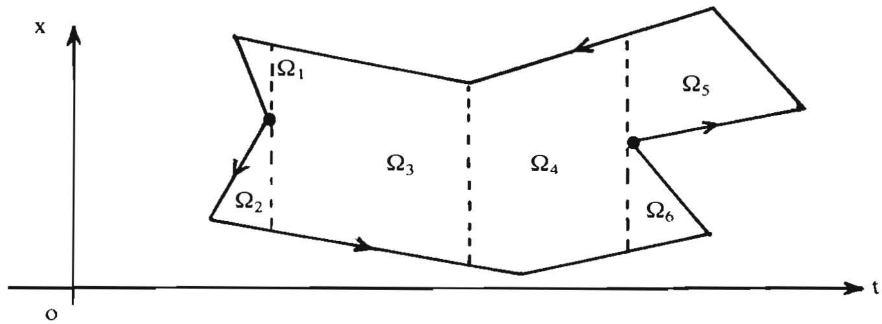
٢ - طرح المسألة :

إن الهدف من هذا العمل هو تحديد صقالة (Smoothness) عناصر الفضاء V. وهذا يعني صقالة الدوال $(\bar{u}_i)_{i=1,\dots,P}$.

لنشر إلى خاصية مهمة تتمتع بها الدّوال $(\bar{u}_i)_{i=1,\dots,P}$ تظهر بوضوح في برهان النظرية ١ وفي نص وبرهان النظرية الرئيسية المقدمة في القسم الأول (سعد الله ١٩٨٩). تؤكد هذه الخاصية أن كل حل شاذ $\bar{u}_i$ مرتبط بزاوية معينة S_i من Ω ولا يرتبط بالزوايا الأخرى. وعلى وجه التحديد فإن كل $\bar{u}_i$ مصقول (أي ينتمي إلى $\mathbf{H}^{1,2}$) خارج أي جوار للزاوية S_i. وأكثر من ذلك فإنه إذا رمزنا بـ T_i لفاصلة (Abscissa) الزاوية S_i فإننا نجد بأن :

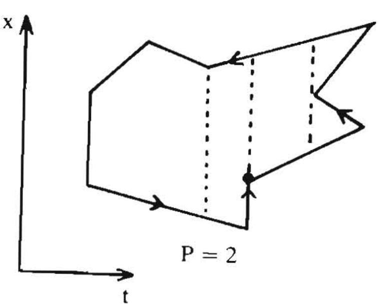
$$\bar{u}_i \in \mathbf{H}^{1,2}\left(\Omega \cap \{ (t,x) : t < T_i \} \right)$$

يتبين من هذه الخاصية أننا نستطيع القيام بدراسة محلية (Local Study) أي اعتبار مضلع Ω يُظْهِر حلاً شاذاً واحداً، وهذا يعني اعتبار $P = 1$ في النظرية ١ .

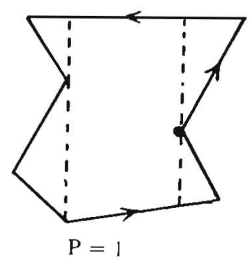


الشكل (١)

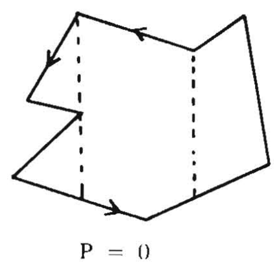
ليكن P عدد زوايا Ω التي يقع كل منها على حافة أحد المضلعات Ω_i ، داخل الضلع الموازي والمتجه اتجاه المحور (ox) [انظر في الأشكال (٢)، (٣)، (٤) أمثلة لقيم P حسب المضلع Ω].



الشكل (٤)



الشكل (٣)



الشكل (٢)

يمكننا الآن تقديم النتيجة التالية المبرهنة في (Sadallah 1976)، أنظر أيضاً . (Sadallah 1983)

نظرية ١ : إن مؤثر الحرارة L متباين (one - to - one) من $\mathbf{H}_c^{1,2}(\Omega)$ في $L^2(\Omega)$. إضافة إلى ذلك فإن صورته مغلقة وبعدها المرافق (Codimension) يساوي P .

يعـرّف فضاء سـوبولاف (Sobolev) غـير المتنـاظـر $\mathbf{H}^{1,2}_{t,x}(\Omega)$، الـذي نـرمـز لـه اختصاراً $\mathbf{H}^{1,2}(\Omega)$ بِـ :

$$\mathbf{H}^{1,2}(\Omega) = \{ u \in L^2(\Omega) : D_t u, D_x u, D_x^2 u \in L^2(\Omega) \}$$

حيث يرمز $L^2(\Omega)$ لفضاء الدوال ذات المربعات القابلة للمكاملة على Ω، ويشير D_t وَ D_x لمؤثري الإشتقاق بالنسبة لِـ t ، x على الترتيب. ندخل أيضاً الفضاء :

$$\mathbf{H}^{1,2}_c(\Omega) = \{ u \in \mathbf{H}^{1,2}(\Omega) : u_{|\Gamma - \Gamma_N} = 0 \}$$

ثم نعتبر المسألة الحدية (Boundary Value Problem) التالية :

$$(P) \quad \begin{cases} Lu = f \in L^2(\Omega) \\ u_{|\Gamma - \Gamma_N} = 0 \end{cases}$$

حيث يشير L ، من الآن فصاعدا، لمؤثر الحرارة أي : $L = D_t - D_x^2$.

إن الفضـاء الطبيعي الـذي ينبغي أن ينتمي إليه الحـل u هو $\mathbf{H}^{1,2}(\Omega)$، ذلـك ما نجده بالفعل عندما يكون Ω نظامياً (Regular) . تبين النظرية التي سنعرضها بعد حين أن الأمر ليس كذلك عندما يكون Ω مضلعاً غير محدب .

لنمرر مستقيماً موازياً للمحور (ox) بكل زاوية من المضلع Ω يكون قياسها أكبر تماماً من π. بهذه الكيفية، نغطي Ω بمضلعات $(\Omega_i)_{i\in I}$ كلها محدبة :

$$\Omega = \bigcup_{i \in I} \Omega_i$$

نلاحظ أنه إذا كان Ω غير محدب فإن لكل Ω_i ضلعاً يوازي المحور (ox) .

Arab Gulf J. Scient. Res., 9(1), pp. 1-26 (1991)

صقالة الجزء الشاذ لحل معادلة الحرارة في ساحـــة مضلعيـــة

(القســم الثانـي)

أبو بكر خالد سعد الله

قسم الرياضيات ـ المدرسة العليا للأساتذة ـ ١٦٠٥٠ ـ القبة ـ الجزائر

خلاصـة : نهتم في هذا البحث بمعادلة الحرارة، بشروط كوشي ـ ديركليت، التي نعتبرها في ساحة مضلّعية غير محدبة. وبعد أن نذكّر بأن لحل هذه المسألة أجزاء شاذة (Singular Parts) بسبب زوايا الساحة المضلعية، فإننا نعين صقالة (Smoothness) هذه الأجزاء تعييناً كاملاً.

يتم كل ذلك في فضاءات سوبولاف غير المتناظرة (Non Symmetric Sobolev Spaces) باعتبار الطرف الثاني لمعادلة الحرارة هي في فضاء الدوال ذات المربعات القابلة للمكاملة.

تستند البراهين أساساً إلى نتائج القسم الأول من هذا البحث وإلى خواص تتعلق بنظرية الاستقطاب (Interpolation Theory).

١ ـ المقدمــة :

نواصل في هذا القسم تناول صقالة الجزء الشاذ الذي يظهر في حل معادلة الحرارة، والهدف من دراستنا هو تعميم ما توصلنا إليه، في حالة مضلع مكون من جداء مستطيلين، إلى حالة ساحة مضلعية كيفية.

ليكن Ω مضلعاً في $\mathbb{R}^2$ موجهاً في الاتجاه المباشر. نرمز لمتغيريه بـ (t, x) ونضع : Γ = حافة Ω وَ Γ_N = مجموعة أضلاع Ω الموازية للمحور $(o\ x)$ والموجهة باتجاهه، هذه المجموعة قد تكون خالية.