بحـث أصلي

م حـازي

نوى المؤثرات الشبه التفاضلية الملحقة بالرموز من صنف جوفري (Gevrey)

المستخلص . قام م. ص. باوندي (M.S. Baouendi) وش. جولاويك (C. Goulaouic) وجـ. ميتيفيي (G. Metivier) في (1983) Baouendi , Goulaouic and Metivier بدراسة المؤثرات الشبه التفاضليّة التحليليّة (analytic pseudodifferential operators) من خلال وصف نواها ورموزها. اضطلعنا بتوسيع الفكرة لتشمل المؤثرات الشبه التفاضليّة الملحقة برموز هورمندر (Hörmander) من نمط جوفري .

كلمات مدخلية: رموز جوفرية، نوى جوفرية، مؤثرات شبه تفاضلية

Kernels of pseudodifferential operators associated to Hörmander symbols of Gevrey type
M Hazi

Abstract:M. S. Baouendi, C. Goulaouic and G. Metivier studed in (Baouendi, Goulaouic and Metivier (1983)) analytic pseudodifferential operators through description of their kernels on one hand and their symbols on the other hand. We extend, in this article, this study to the pseudodifferential operators associated to Hörmander symbols of Gevrey type.

Key words: Gevery, Hörmander, pseudodifferential operators,

مقدمة

جاء في الدراسة المشار إليها في الملخّص أنّ المعنيّين توصّلوا إلى تبيان تطابق المؤثّرات الشبه التفاضليّة التحليليّة عندما تكون معرّفة من خلال نواها أو من خلال رموزها كما هو الشأن في (Boutet de Monvel (1972)) و (Treves (1980)) . تولينا سحب هذه الفكرة على المؤثّرات الشبه التفاضليّة من الصنف ($^\infty$ في (Hazi (1982)) فظلّ صدقها قائما . نستعرض في هذه الورقة دراسة إلحاق نواة جوفريّة بكل مؤثر معرّف بواسطة رمزه ؛ على أن ندرس العكس في عمل لاحق.

ترميزات وتعاريف :

تعريف 1 : ليكن p عددا طبيعيا غير معدوم ، و D ميدانا من R^p ، و ϕ دالة عددية من صنف $(D)^\infty$) تذعن للقيد :

$$\left\| \frac{\partial^{n_1+\cdots+n_p}\phi}{\partial^{n_1}x_1\ldots\partial^{n_p}x_p} \right\| \le M\,\frac{\Gamma(\lambda_1 n_1)\ldots\Gamma(\lambda_p n_p)}{R_1^{n_1}\ldots R_p^{n_p}}, \qquad (1)$$

حيث M و $(R_i)_{1<i<p}$ ثوابت حقيقيّة موجبة و $n_1+n_2+\cdots+n_p=p$. يرمز Γ للدالة الأولريّة (Euler's function). نقول ، والحال هذه، إنّ الدالة ϕ من صنف جوفري رتبته λ_i إزاء المتغيّر x_i (i من $\{1,2,\ldots,p\}$) في الميدان D. وإذا كان λ أكبر الأعداد $(\lambda_i)_{1<i<p}$ ، قيل عن الدالة ϕ حينئذ إنها جوفرية من الرتبة λ إزاء $(x_1,\ldots,x_p)$.

إذا اعتبرنا $0<\lambda$ واستحضرنا خصائص الدالة الأولرية Γ، أمكن عندئذ وضع هذا الـ:

محمد حازي ، قسم الرياضيات ـ المدرسة العليا للأساتذة
16050 ـ القبّة ـ الجزائر ، هاتف:21297511 (213) ، فاكس: 21282067 (213)

تعريف 2 : ليكن n عددا طبيعيا غير معدوم و Ω مفتوحا من R^n و s عددا حقيقيا يفوق (أو يساوي) 1 .
يقال عن دالة ϕ من $(\Omega)^{\infty}$) إنها من صنف جوفري رتبته s إذا وفقط إذا حققت الشرط التالي :

$$\forall \alpha \in N^n \quad \left\| D^{\alpha}\phi \right\| = \sup_{x \in K} \left| D^{\alpha}\phi(x) \right| \leq C^{|\alpha|+1}(|\alpha|!)^s \tag{2}$$

(وضعنا $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ و $|\alpha|! = \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\right)!$).

تعريف 3 : ليكن n من N^* و $1 \leq s$ و m عددا حقيقيا كيفيا ، و Ω مفتوحا من R^n .
نسمي رمزا جوفريا رتبته s على Ω كل دالة عددية $\phi = \phi(z,\xi)$ من $(\Omega \times R^n)^{\infty}$) تحقق الشرط التالي :
مهما يكن الجزء المتراص K من Ω يوجد ثابت موجب C بحيث ، أيا كان z من K و ξ من R^n و α و β من N^n فإن :

$$\left| D_z^{\beta} D_{\xi}^{\alpha} \phi(z,\xi) \right| \leq C^{|\alpha+\beta|+1}(|\alpha|!)^s (|\beta|!)^s (1+|\xi|)^{m-|\alpha|} . \tag{3}$$

نرمز لمجموعة هذه الرموز بـ $\mathcal{S}^{m}_{(G,s)1,0}(\Omega, R^n)$.
حريّ بنا أن نشير هنا إلى أنّه غالبا ما تؤخذ الدالة ϕتحليليّة إزاء z. (وهو ما يترجم بأخذ $s = 1$ في العامل $(|\beta|!)^s$ الموافق للمتغيّر z).

تعريف 4 : نحتفظ بترميزة التعريف (1) ونضيف :
ليكن U جوارا مفتوحا للصفر من R^n و m عددا موجبا .
نقول عن توزيع $T = T(z,x)$ ، معرّف في $\Omega \times U$ ، إنّه نواة لجوفري رتبته sإذا وفقط إذا توفّر ما يلي :
أ. $T / \Omega \times (U \setminus \{0\}) = f$ دالة جوفرية رتبتها s وتحقق :
مهما يكن الجزء المتراص K من Ω ، يوجد جوار مفتوح V من $U \setminus \{0\}$ وثابت موجب C بحيث :

$$\forall \alpha, \beta \in N^n \quad \left| D_z^{\alpha} D_x^{\beta} T(z,x) \right| \leq C^{|\alpha+\beta|+1}(|\alpha|!)^s (|\beta|!)^s |x|^{-m-n-|\beta|} , \tag{4}$$

من أجل كل (z,x) من $K \times V$.
ب. للتوزيع T الشكل :

$$T(z,.) = P_{f_\theta}(z,.) + \sum_{|\alpha| \leq m} C_{\alpha}(z)\, \delta^{(\alpha)} , \tag{5}$$

حيث $(C_{\alpha})_{\alpha}$ جماعة من دوال جوفريّة رتبتها sفي Ω و θ دالة عددية من $(U)^{\infty}_{0}$) قيّدناها بالشرط $\theta \equiv 1$ في جوار الصفر؛ أمّا P_{f_θ} فإنّه توزيع معرّف، من أجل كلّ ψ من $(U)^{\infty}_{0}$) كالتالي :

$$< P_{f_\theta}, \psi > = \int f(x)\left(\psi(x) - \sum_{|\alpha|\le m} \frac{D^\alpha \psi(0)}{\alpha!} x^\alpha \psi(x)\right) dx \tag{6}$$

جـ. إذا كان m طبيعيّا فإنّه من أجل كلّ جزء متراص K من Ω يوجد ثابت موجب تماما C بحيث:
مهما يكن α من $\mathbb{N}^n$ ، مع $m = |\alpha|$ ، ومهما يكن $0 < \varepsilon$ فإن :

$$, \left|\int_{|x|\ge\varepsilon, x\in U} x^\alpha f(z,x)\, dx\right| \le C \tag{7}$$

وهذا ، أيّا كان z في K.

نرمز لمجموعة هذه النوى بـ $_{1,0}\mathsf{K}^{\,m}_{(G,s)}\left(\Omega, \mathbb{R}^n\right)$.

وضع المسألة

نعتزم الآن إثبات هذه الـ :

مبرهنة 1 : الصورة $T(z,x) = (\mathcal{F}^{-1} f)(z,\xi)$، وفق التحويل العكسي لفوريي (inverse Fourier transform) ، لكل عنصر $f = f(z,\xi)$ من الفضاء $_{1,0}\mathsf{S}^{\,m}_{(G,s)}\left(\Omega, \mathbb{R}^n\right)$ ، تنتمي إلى $_{1,0}\mathsf{K}^{\,m}_{(G,s)}\left(\Omega, \mathbb{R}^n\right)$.

إثبات : لنشر قبل الشروع في البرهان إلى أنه بحكم تواجد المتغير z في متراص K ، فإن التقديرات التي سوف تعطى لا تأخذ z في الحسبان . لذا نهمله ونطمسه في ترميزاتنا المضارعة .

نستهل البرهان باللجوء إلى توطئة أولى ((Hazi (1986)) :

توطئة 1 : ليكن m عددا حقيقيا موجبا و f دالة من $\left(\mathbb{R}^n\right)^\infty$ تحقق :

$$\left|D^\alpha f(\xi)\right| \le C\left(1 + |\xi|\right)^{m-|\alpha|} \quad ; \quad |\alpha| \le m + n + 1 . \tag{8}$$

إذا كان $T = \mathcal{F}^{-1} f$ و g مقصوره على $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ، فإنه :

أ. يوجد ثابت موجب يحقق في كرة الوحدة المبتورة صفرها :

$$. \left|g(x)\right| \le C_{m,n} C\, |x|^{m-n} \tag{9}$$

ب. توجد أعداد حقيقية $\left(C_\alpha\right)$ ودالة عددية θ من $\left(\mathbb{R}^n\right)^\infty_0$ ، مقيدة بالشرط $\theta \equiv 1$ في جوار الصفر بحيث :

$$. T = P_{f_\theta} + \sum_{|\alpha|\le m} C_\alpha \delta^{(\alpha)} \tag{10}$$

برهان التوطئة 1 : من أجل كل عدد حقيقي ε مختار في المجال $]0,1[$ نضع $f_\varepsilon = e^{-\varepsilon|\xi|^2} f(\xi)$. إذا استعنا بدستور ليبنيتز (Leibniz formula) ولاحظنا حضور العامل $e^{-\varepsilon|\xi|^2}$ تبين بجلاء أن الدالة f_ε تحقق العلاقة (8) بثابت لا يتعلق بالعدد ε .

من جهة أخرى ، نعتبر دالة عددية h من $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ بحيث :

$$h(\xi) = \begin{cases} 1 & ; \quad |\xi| \le 1, \\ 0 & ; \quad |\xi| \ge 2. \end{cases} \tag{11}$$

من أجل α المأخوذ في $\mathbb{N}^n$ مع الشرط :

$$m + n - 1 \le |\alpha| \le m + n + 1, \tag{12}$$

يكون لدينا :

$$x^\alpha T_\varepsilon(x) = i^{|\alpha|}(I_1 + I_2 + I_3),$$

حيث :

$$T_\varepsilon(x) = \mathcal{F}^{-1}(f_\varepsilon) \text{ و } i = \sqrt{-1}$$
$$I_1 = \int D^\alpha f_\varepsilon(\xi)\, h(|x|\xi)\, (e^{ix\xi} - 1)\, d\xi,$$
$$I_2 = \int D^\alpha f_\varepsilon(\xi)\, h(|x|\xi)\, d\xi,$$
$$I_3 = \int D^\alpha f_\varepsilon(\xi)\, (1 - h(|x|\xi))\, e^{ix\xi} d\xi.$$

لنمتحن هذه التكاملات . لدينا بخصوص التكامل الأول :

$$I_1 \le \int \left|D^\alpha f_\varepsilon(\xi)\, h(|x|\xi)\right| \left|(e^{ix\xi} - 1)\right| d\xi .$$

وإذا لاحظنا أن $\left|(e^{ix\xi} - 1)\right| \le |x|\,|\xi|$ جاءنا :

$$I_1 \le C \int_{|\xi| \le \frac{2}{|x|}} (1 + |\xi|)^{m-|\alpha|} |x|\,|\xi|\, d\xi,$$

وبالتالي :

$$|I_1| \le C_1 C |x|^{-m-n+|\alpha|}, \tag{13}$$

حيث C_1 ثابت يتعلق بالعددين m و n ، و C هو الثابت الوارد في العلاقة (8) .

أما التكامل الثاني فإن مكاملته بالتجزئة تمدنا بشأنه :

$$I_2 \le C_2 C \int_{\frac{1}{|x|} \le |\xi| \le \frac{2}{|x|}} (1 + |\xi|)^{m-|\alpha|+1} |x|\, d\xi ,$$

وعليه :

$$|I_2| \le C_3 C\, |x|^{-m-n+|\alpha|}. \tag{14}$$

لنتوقف في الأخير عند التكامل الثالث . نلاحظ في البداية أنه مهما يكن j من $\{1,2,\dots,n\}$ فإن $D_{\xi_j} e^{ix\xi} = x_j e^{ix\xi}$ ؛
ولما كان المؤثر D_{ξ_j} ذاتي القرين (self-adjoint operator) أمكن أن نكتب :

$$x_j I_3 = i \int D_{\xi_j}\left(D^\alpha f_\varepsilon(\xi)\left(1 - h(|x|\,\xi)\right)\right) e^{ix\xi}\, d\xi .$$

وعلى ضوء العلاقتين (8) و(12) يأتي :

$$|x_j I_3| \le C_4 C \int_{|\xi| > \frac{2}{|x|}} (1+|\xi|)^{m-|\alpha|-1} d\xi + C_5 C \int_{\frac{1}{|x|} < |\xi| < \frac{2}{|x|}} (1+|\xi|)^{m-|\alpha|} |x|\, d\xi .$$

ومنه :

$$|x_j I_3| \le C_6 C\, |x|^{-m-n+|\alpha|+1}. \tag{15}$$

خلاصة : يمكن بالاستناد إلى النتائج (13) و (14) و(15) أن نستنتج وجود ثابت موجب $C_{m,n}$ بحيث :
من أجل كل عنصر غير معدوم x من كرة الوحدة المغلقة للفضاء R^n ، وكل ε من المجال $]0,1]$ ، يكون لدينا :

$$|x|^{m+n}\, |T_\varepsilon(x)| \le C_{m,n} C . \tag{16}$$

يتضح ، من جهة أخرى ، أن f_ε تنتمي إلى فضاء شفارتز $\mathcal{S}(\mathsf{R}^n)$ (Schwartz space) . وعليه ، فإن الدالة T_ε تنتمي هي أيضا إلى الفضاء ذاته. وفضلا عن ذلك ، فهي تقبل T نهاية لها مع مآل ε إلى الصفر. وبه يتم برهان العلاقة (9) .

على ضوء العلاقة (16) يمكن التأكد ، من أجل $|x| \le 1$ و $|\alpha| > m$ ، أن العبارة $x^\alpha T_\varepsilon$ تقبل المكاملة محليا ، وهو ما ينجر عنه الجزء (ب) من التوطئة ويختم برهانها .
تتكفل التوطئة الثانية التالية بإبراز سلوك وتصرف T في جوار الصفر.

توطئة 2 : إذا كان f رمزا من الفضاء $_{1,0}\mathcal{S}^{m}_{(G,s)}(\Omega, \mathsf{R}^n)$ حققت محولته ، وفق التحويل العكسي لفوريي $\mathcal{F}^{-1}(f) = T$ ، العلاقة (4) .

برهان التوطئة 2 : نعتبر دالة g من صنف جوفري رتبته s ، تحقق من أجل ثابت موجب R :

$$g(\xi) = \begin{cases} 0 \quad ; & |\xi| \le 2R, \\ 1 \quad ; & |\xi| \ge 3R. \end{cases} \tag{17}$$

ليكن f عنصرا من $_{1,0}\mathcal{S}^{m}_{(G,s)}(\Omega, \mathsf{R}^n)$. إن محولته $\mathcal{F}^{-1}(f) = T$ ، بواسطة التحويل العكسي لفوريي ، تحقق :
من أجل كل β و γ من N^n بحيث $|\gamma| = |\beta|$ ، يكون لدينا :

$$x^\gamma D_x^\beta T(x) = I_1 + I_2 ,$$

حيث :

$$I_1 = \mathcal{F}^{-1}\left(D_\xi^\gamma \left(1 - g(\xi)\right) \xi^\beta f(\xi)\right),$$

$$I_2 = \mathcal{F}^{-1}\left(D_\xi^\gamma \left(g(\xi)\, \xi^\beta f(\xi)\right)\right).$$

لنتوقف أولا عند العبارة I_1 . يكون لدينا بفضل g و (8) :

$$|I_1| \le \int_{|\xi|<3R} C_1 C^{|\beta|+1} \left(|\beta|!\right)^s \left(1 + |\xi|\right)^m d\xi \le C_2^{|\beta|+1} \left(|\beta|!\right)^s , \tag{18}$$

حيث C_2 ثابت موجب يتعلق بالرتبة s .

لنعتبر I_2 . لنضع ، دفعا لثقل النص ، $H(\xi) = D_\xi^\gamma \left(g(\xi)\, \xi^\beta f(\xi)\right)$. يمكن بمقتضى دستور ليبنيتز واستغلال العلاقة (8) وخصائص g ، أن نجد ثابتا موجبا C_3 لا يتعلق بـــ β بحيث :

أيا كان α من $\mathbb{N}^n$ ، المقيد بـــ $|\alpha| \le m + n + 1$ ، فإن :

$$D^\alpha H(\xi) \le C_3^{|\beta|+1} \left(|\beta|!\right)^s \left(1 + |\xi|\right)^{m-|\alpha|} .$$

يترتب عن هذا أن شروط التوطئة (1) متوفرة في الدالة H. يحق لنا إذن (مع الاستناد إلى المتراجحة (18)) أن نجزم بوجود ثابت موجب C_4 غير مرتبط بـــ β ، بحيث :

$$\left|x^\gamma D_x^\beta T(x)\right| \le C_4^{|\beta|+1} \left(|\beta|!\right)^s |x|^{-m-n} .$$

إنه المطلوب بعينه !

لإنهاء إثبات المبرهنة (1) نسوق هذه التوطئة .

توطئة 3 : ليكن m عددا طبيعيا و f دالة عددية من $C^\infty\left(\mathbb{R}^n\right)$ تحقق الشرط:

$$\left|D^\alpha f(\xi)\right| \le C\left(1 + |\xi|\right)^{m-|\alpha|} \quad ; \quad |\alpha| \le m + n + 1 .$$

إذا ما وضعنا $\mathcal{F}^{-1}(f) = T$ ، وجد عندئذ ثابت C' موجب بحيث :

مهما يكن ε من المجال $]0,1[$ ، ومهما يكن α من $\mathbb{N}^n$ ، مع $|\alpha| = m$ ، فإن:

$$\left|\int_{\varepsilon<|x|<1} x^\alpha T(x)\, dx\right| \le C' \tag{19}$$

برهان التوطئة 3 : نعتبر دالة عددية u من $C_0^\infty\left(\mathbb{R}^n\right)$ ، حاملها في كرة الوحدة المفتوحة مع $0 \ne u(0)$. من أجل $0 < \varepsilon$ نضع $u_\varepsilon(x) = u\left(\dfrac{x}{\varepsilon}\right)$. بالارتكاز على (9) يأتي عندئذ أن المتراجحة (19) تكافئ :

$$\sup_{0<\varepsilon<1}\left|< x^{\alpha}T(x),\, u_{\varepsilon}(x) >\right| \leq C'' \qquad (20)$$

حيث C'' مقدار موجب يظل ثابتا لما تمسح الدالة u جزءا محدودا من $\left(R^{n}\right)^{1}$) . بعد هذا ، يكون لدينا :

$$\left|< x^{\alpha}T(x),\, u_{\varepsilon}(x) >\right| = (2\pi)^{-n}\left|< D^{\alpha}f(x),\, \varepsilon^{n}\hat{u}(\varepsilon x) >\right|.$$

وإذا ما استحضرنا المتراجحة $\left|D^{\alpha}f(x)\right| \leq C$ من أجل $m = |\alpha|$ حق لنا أن نكتب :

$$\left|< x^{\alpha}T(x),\, u_{\varepsilon}(x) >\right| \leq (2\pi)^{-n} C \int \left|\hat{u}(\xi)\right| d\xi < C''',$$

وهو ما ينهي التوطئة 3 ويختم إثبات المبرهنة (1).

References

Baouendi, M. S. and Goulaouic, C. and Metivier, G. (1983) Kernels and symbols of analytic pseudodifferential operators ; J. Differ. Equations, **48** : 227-240.

Boutet De Monvel, L.(1972) Opérateurs pseudodifferentiels analytiques et opérateurs d'ordre infini ; Annales de l'Institut de Fourier, Grenoble, **22** (3) : 229 - 268.

Hazi, M. (1982) Noyaux et symboles des opérateurs pseudodifferentiels en ℰ∞ ; Mémoire de D.E.A, Ecole Polytechnique, Paris.

Hazi, M. (1986) Description des noyaux et symboles des opérateurs pseudodifferentiels associés à des symboles de Hörmander de type Gevrey; Thèse de Magister, Université H. Boumédienne, Alger.

Treves, F. (1980) An introduction to pseudodifferential and Fourier integral operators; Plenum Press, New-York.

(Received10/02/1998, in revised form 24/01/2001)