بحث أصلي

ق. فيازمينسكي

إرجاع حقل شعاعي في منوعة ريمانية إلى حقل غير قابل للانضغاط

المستخلص: يكون حقل شعاعي L غير قابل للانضغاط إذا كان تفرقه معدوماً، أي إذا كان يحقق المعادلة 0 . إن حل هذه المعادلة معروف جيداً في الفراغ الاقليدي الثلاثي. نعين في هذا البحث عبارات عامة لحل هذه المعادلة في منوعة ريمانية M ذات بعد كيفي n ، ونبين استناداً إلى إحدى هذه العبارات أن كل (n-1) تابعاً كيفياً تعرف حقلاً غير قابل للانضغاط تتعين خطوطه بالمعادلات الناتجة عن مساواة هذه التوابع بثوابت كيفية. نبرهن أنه من أجل كل حقل قابل للانضغاط K توجد أسرة غير منتهية من الحقول غير القابلة للانضغاط لكل حقل منها خطوط K نفسها ولكنها بالطبع تختلف عنه كما تختلف عن بعضها بعضاً بمنحنياتها التكاملية. ندخل مفهوم مزيل انضغاط حقل K ، وهو تعريفاً أي تابع μ على M ينتج عن ضربه بالحقل القابل للانضغاط K حقلاً غير قابل للانضغاط L=μK. نبين أن مسألة إيجاد أسرة الحقول غير القابلة للانضغاط الموافقة للحقل K تكافئ إيجاد أسرة مزيلات انضغاط الحقل . نبرهن أيضاً أن نسبة مزيلين لانضغاط الحقل K هو تكامل لهذا الحقل، كما نجد العبارة العامة لمزيلات انضغاط حقل معطى. في حالة منوعة ذات بعدين نجد الصلة بين مزيلات انضغاط حقل وعوامل تكميل معادلة تفاضلية عادية محلولة بالنسبة إلى المشتق وناتجة عن الحقل. نوضح النظرية بتطبيقها على الحقول المركزية. نثبت أخيراً أن مجموعة الحقول غير القابلة للانضغاط في منوعة تؤلف جبراً جزئياً من جبر لي المشكل من كل الحقول من الصف C^{∞} في المنوعة ويحتوي بدوره مجموعة حقول كيلينغ كجبر جزئي منه.

Reduction of a Vector Field in a Manifold to an Incompressible Field

A vector field L in a manifold M is incompressible if its divergence is equal to zero. i.e. if it satisfies the equation $divL=0$. The solution of the last equation is well known in the three dimensional Euclidean space. In this work we determine a few expressions for an incompressible field in an n-dimensional Riemannian manifold M. Starting from one of these expressions, we show that every $(n-1)$ functions of class C^2 on M define an incompressible field whose lines are determined through setting these functions equal to arbitrary constants. It is also shown that to every compressible field K there corresponds an infinite family of incompressible fields that have the same lines of K, but differ from K, as well as from each other, by their integral curves. The concept of "a compressibility removing factor" of a vector field K is introduced; it is defined as any function μ on M such that the field $L = \mu K$ is incompressible. It is shown that the problem of determining the family of incompressible fields associated with the vector field K is equivalent to determining the family of compressibility removing factors of the field K. The quotient of two compressibility removing factors of field K is proven to be an integral of this field, and a general expression of the compressibility removing factors of the field K is derived. In case of a two-dimensional manifold, the relation between the compressibility removing factors of the field and the integrating factors of the ordinary differential equation associated with the field is found. The theory is illustrated through application to central fields. Finally, it is demonstrated that the set of all incompressible fields in a manifold M forms a sub-algebra of the Lie algebra formed by the set of all C^{∞} vector fields in M, and that the sub-algebra of incompressible fields contains the set of Killing fields as a sub-algebra.

C. Viazminsky
Department of Physics,
University of Aleppo, Aleppo, Syria
Tel: 00963 2673233
Fax: 2229284

1. مقدمة

يتواتر ظهور المعادلة $divL = 0$ في عدة ميادين فيزيائية، ونذكر على سبيل المثال الالكتروديناميك والهيدروديناميك والميكانيك الكوانتي. وبالحقيقة فان معادلتين من معادلات ماكسويل الأربعة للحقل الكهرطيسي في الخلاء (Landau and Lifshitz,1980) ، وهما

$$divE = 0, \quad divH = 0,$$

حيث E و H شـدتا الحقلين الكهربائي والمغناطيسي ، لهما الشكل المذكور. كما أن معادلة الاستمرار $div\vec{j} + \partial\rho / \partial t = 0$ ، حيث $\vec{j}$ كثافة تيار توزع معطى (سواء كان توزعا للشحنة أو للمادة)، و ρ كثافته الحجمية، ترد إلى الشكل المذكور عندما تكون كثافة التوزع الحجمية لا تتعلق بالزمن. في ميكانيك الكم أيضاً وحيث يعطى الاندفاع $\hat{P}$ الموافق لحقل L بالعبارة $\hat{P} = -i\hbar(L + \frac{1}{2}divL)$ (Mackey, 1963) ، تفرز المعادلة المذكورة صفاً مميزاً من الاندفاعات (Viazminsky, 1998; Viazminsky and Vary, 2000a).

في الفراغ الاقليدي الثلاثي E_3 يوجد للمعادلة $div\ L = 0$ حل معروف جيداً، وهو $L = \nabla \times A$ حيث A حقل شعاعي يتصف بأنه C^2 في الفراغ (له مشتقات جزئية من المرتبة الثانية وهذه المشتقات مستمرة). سنشتق في هذا البحث صيغاً عامة لحل المعادلة المذكورة في منوعة ريمانية بعدها n كيفي . نشير إلى أن العبارات المشتقة للحقل L وبرغم أنها صالحة في أية جملة إحداثية، فإنها لا تتحول كشعاع مخالف للتغير ولا كشعاع موافق للتغير . وأما استعمالنا لمصطلحات الحساب التنسوري ، وبالتحديد مصطلح الجمع على الدليل المكرر مرتين ومصطلح الدليل الحر، فلا يتعدى في غايته تسهيل العمل واختصار الحسابات .

2. معادلة الحقل غير القابل للانضغاط

لتكن M_n (أو M اختصاراً) منوعة ريمانية ، و $(x^1, x^2,...., x^n)$ مخططاً إحداثياً فيها (chart) يأخذ فيه المتريك الشكل $ds^2 = g_{ij}dx^i dx^j$ ، ولنضع $g = \det(g_{ij})$. ليكن L حقلاً شعاعياً C^1 في M له في المخطط المعطى العبارة $L = \xi^i(x^1, x^2,...., x^n)\partial / \partial x^i$. من أجل شروح وافية حول الحقول الشعاعية في منوعة نرجع إلى (Loomis and Sternberg, 1968) . نقول عن الحقل L إنه عديم الانضغاط (incompressible) إذا كان تفرقه

$$divL = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^i}(\sqrt{g}\,\xi^i) \tag{1}$$

معدوماً (Abraham and Marsden, 1968). وقد يوصف حقل عديم التفرق بأنه حقل يحافظ على عنصر الحجم (Matsushima, 1972) . حسب المعادلة (1) يكون الحقل L غير قابل للانضغاط إذا حققت مركباته المعادلة التفاضلية

$$(\sqrt{g}\,\xi^i)_{,i} = 0 \tag{2}$$

حيث تعني الفاصلة متبوعة بالدليل i اشتقاقاً جزئياً بالنسبة للإحداثي x^i ، ويعني تكرار الدليل مرتين في حد ما جمعاً على ذلك الدليل من 1 إلى بعد الفراغ n . يمكن كتابة معادلة الحقل غير القابل للانضغاط (2) بالشكل

$$A^i_{,i} = 0 \quad where \quad A^i = \sqrt{g}\,\xi^i \ .$$

تقبل المعادلة (2) حلولاً واضحة مثل

$$\xi^r = g^{-1/2} \qquad , \ \xi^j = 0 \qquad (j \neq r) \tag{3}$$

حيث r دليل مثبت مختار كيفياً من المجموعة $\{1,...,n\}$. وبما أن معادلة الحقل خطية في التوابع المجهولة ξ^j (أو A^j) فإن كل تركيب خطي في الحلول (3) هو أيضاً حل لها. سنرى في البند 5 أن مبادل (commutator) كل حقلين غير قابلين للانضغاط هو حقل غير قابل للانضغاط، وسنبين أن مجموعة الحقول غير القابلة للانضغاط تؤلف جبر لي.

في حالـــة البعد الواحد نشير إلى انه إذا زودت M_1 بإحداثي x حيث يكون $ds^2 = g(x)dx^2$ ، فنجد حسب المعادلة (2) أن أعم شـــكل لحقـــل غـــير قابل للانضغاط هو $L = cg^{-1/2}d/dx$ ، حيث c ثابت كيفي. ولكن M_1 اقليدية حتماً، ويمكن إرجاع المتريك فيها إلى الشـــكل القانوني $ds^2 = dX^2$ بإجراء التحويل $X = \int_{x_0}^{x}\sqrt{g(x)}dx$. يأخذ الحقل L في الإحداثيات الجديدة العبارة $L = c\,d/dX$ ، وهـــو حركة لامتناهية في الصغر للمنوعة M_1 (infinitesimal motion) . إذا كانت M_1 هوميومورفية للمستقيم الحقيقي $\Re$ أو للدائرة S^1 فان L يولد زمرة التناظر $U_t(x) = x + t$ ، حيث $t \in \Re$ ، للمنوعة M_1 . من اجل شروح وافية لزمر التناظر ومولداتها نرجع القارئ إلى (Eisenhart,1964; Matsushima,1972) .

في منوعة M_2 ، يكون الحقل L غير قابل للانضغاط إذا كان $A^1_{,1} + A^2_{,2} = 0$ ، ويكافئ هذا أن المعادلة التفاضلية $A^2dx^1 - A^1dx^2 = 0$ تامة ، ويكافئ هذا بدوره وجود تابع B من الصف C^2 حيث إن $B_{,1} = -A^2, B_{,2} = A^1$. وبناء عليه فإن أعم صيغة لحقل غير قابل للانضغاط في M_2 هي

$$L = g^{-1/2}(B_{,2}\partial/\partial x^1 - B_{,1}\,\partial/\partial x^2) \tag{4}$$

من أجل منوعة M_n يمكن تحقيق (2) بعدة طرق، ربما كان أبسطها هو البدء بتابع كيفي B من الصف C^n على M ، وأخذ $\mathrm{A}^i = \sqrt{\mathrm{g}}\,\xi^i$ بالشكل

$$A^1 = c_1 B_{,23\ldots n}\,, A^2 = c_2 B_{,13\ldots n}\,,\ldots\ldots, A^n = c_n B_{,12\ldots n\text{-}1} \tag{5}$$

وحيث c_i ثوابت كيفية تحقق العلاقة $\sum_{i=1}^{n} c_i = 0$. ويكون لدينا

$$A^i_{,i} = \sum_i c_i B_{,12\ldots\ldots n} = 0\,. \tag{6}$$

وبالـــتالي فإن الحقل المعرف بـــ (5) غير قابل للانضغاط . إذا كانت مركبات L كافة غير معدومة فيمكن بشكل خاص اختيار الثوابت بالشكل $\mathrm{c}_i = (-1)^{i-1}\binom{n-1}{i-1}$ (لا جمع على i)، وإذا كان بعد الفراغ زوجياً فيمكن أخذ $c_i = (-1)^{i-1}$. تعين هذه الطريقة صفاً ضيقاً من الحقول غـــير القابلة للانضغاط في M ، وبعبارة ثانية وإذا كان $L = \xi^i\partial/\partial x^i$ حقلاً غير قابل للانضغاط معطى فليس من الضروري أن يوجد تابع B يحقق (5) . تعين المبرهنة التالية الحالة التي يمكن التعبير فيها عن L بالصيغة (5).

مبرهنة 1 . شرط لازم كاف لكي يعطى حقل غير قابل للانضغاط $L = \xi^i\partial/\partial x^i$ بالعبارات (5) هو أن توجد ثوابت c_i ، $i \in [1,n]$ ، حيث إن $\sum c_i = 0$ ، وأن تتحقق العلاقات التالية

$$A^1_{,1}/c_1 = A^2_{,2}/c_2 = \ldots\ldots = A^n_{,n}/c_n. \tag{7}$$

برهان : إن البرهان على لزوم الشرط أمر مباشر ، ونبرهن على الكفاية بتعريف تابع

$$B = \frac{1}{c_1}\int A^1_{,1}dx^1dx^2\ldots.dx^n$$

حيث نفترض أن c_1 غير معدوم. وبملاحظة (7) نجد أن L معطى بالعبارة (5).

3.عبارات عامة للحقل غير القابل للانضغاط

عبارة أولى: إن أعم حل للمعادلة (2) ينتج من أخذ $(n-1)$ تابعاً كيفياً ξ^{j} ، تتصف بأنها C^{1} ، وحساب $\xi^{i}\,(i\neq j)$ بدلالتها لنجد :

$$\sqrt{g}\,\xi^{r}=-\sum_{j\neq r}\int(\sqrt{g}\,\xi^{j})_{,j}\,dx^{r}+h^{r} \tag{8}$$

حيث h^{r} تابع من الصف C^{1} مستقل عن x^{r} . وباختيار كل $(A^{j}=g^{1/2}\xi^{j})$ ، حيث $r\neq j$ ، المشتق الجزئي بالنسبة إلى x^{r} لتابع كيفي B^{j} من الصف C^{2} ، نكتب (8) بالشكل المكافئ:

$$\sqrt{g}\,\xi^{j}=B^{j}_{,r}\,(j\neq r),\quad \sqrt{g}\,\xi^{r}=-\sum_{j\neq r}B^{j}_{,j} \tag{9}$$

ونشير إلى أن التابع الكيفي h^{r} قد تم امتصاصه في تابع أو اكثر من التوابع $B^{j}_{,r}$.

عبارة ثانية: ليكن $e^{i_{1}\ldots\ldots i_{n}}$ تنسور الوحدة ضد المتناظر في كل أدلته . أي أن (Lawden, 1975):

$e^{12\ldots\ldots n}=1$ ،

$e^{i_{1}\ldots\ldots i_{n}}=+1$ إذا كان $(i_{1}\ldots\ldots i_{n})$ تبديلاً زوجياً للترتيب $(12\ldots\ldots n)$،

$e^{i_{1}\ldots\ldots i_{n}}=-1$ إذا كان $(i_{1}\ldots\ldots i_{n})$ تبديلاً فردياً للترتيب $(12\ldots\ldots n)$.

ولتكن $B_{i_{1}\ldots\ldots i_{n-2}}$ ، حيث $i_{1},\ldots,i_{n-2}\in[0,n]$ و $i_{1}<i_{2}<\ldots<i_{n-2}$، توابع كيفية من الصف C^{2} على M .

مبرهنة 2 . إن الحقل

$$L=g^{-1/2}\,e^{i_{1}\ldots\ldots i_{n}}\,B_{i_{1}\ldots\ldots i_{n-2},i_{n-1}}\,\partial/\partial x^{i_{n}} \tag{10}$$

غير قابل للانضغاط.

برهان: حسب (1)

$$\sqrt{g}\,divL=e^{i_{1}i_{2}\ldots\ldots i_{n}}B_{i_{1}i_{2}\ldots\ldots i_{n-2},i_{n-1}i_{n}}$$
$$=\sum_{i_{n-1}i_{n}}\sum_{i_{1}\ldots i_{n-2}}e^{i_{1}\ldots\ldots i_{n}}B_{i_{1}\ldots\ldots i_{n-2},i_{n-1}i_{n}}$$

نعتبر الطرف الأيمن مجموعا مزدوجا على الدليلين i_{n-1},i_{n} وسنبرهن أن كل حد من هذا المجموع المزدوج معدوم. يوافق كل مجموعة مثبتة كيفية $\{j,k\}$ لقيم الدليلين i_{n} و i_{n-1} الحد

$$\varepsilon\left(\frac{\partial}{\partial x^{j}}\frac{\partial}{\partial x^{k}}-\frac{\partial}{\partial x^{k}}\frac{\partial}{\partial x^{j}}\right)\sum_{i_{1}\ldots i_{n-2}}e^{i_{1}\ldots\ldots i_{n-2}jk}\,B_{i_{1}\ldots\ldots i_{n-2}}$$

حيث ε يساوي 1+ أو 1- حسبما يكون التبديل $(i_{1},i_{2},\ldots,i_{n-2},j,k)$ زوجياً أو فردياً، وهو معدوم وضوحاً. وينتج من هذا أن المجموع المزدوج على جميع قيم الدليلين i_{n} و i_{n-1} معدوم أيضاً.

عبارة ثالثة :

ليكن

$$\phi_{k}(x^{1},\ldots\ldots,x^{n})\qquad (k=1,2,\ldots\ldots,n-1) \tag{11}$$

$(n-1)$ تابعاً كيفياً C^{2} في M_{n} ، ولنفرض أنها مستقلة تابعياً ، أي أن $rank\left(\dfrac{\partial\phi_{k}}{\partial x^{j}}\right)=n-1$

مبرهنة 3 : إن الحقل

$$L=\frac{1}{\sqrt{g}}e^{i_1\dots i_n}\frac{\partial\phi_1}{\partial x^{i_1}}\frac{\partial\phi_2}{\partial x^{i_2}}\dots\dots\dots\frac{\partial\phi_{n-1}}{\partial x^{i_{n-1}}}\frac{\partial}{\partial x^{i_n}} \tag{12}$$

في M_n غير القابل للانضغاط .

برهان : يتم البرهان بإثبات أن مركبات L تحقق المعادلة (2). وبالفعل فإن

$$\begin{aligned}(\sqrt{g}\,\xi^{i_n})_{,i_n} &= [\,e^{i_1\dots\dots i_n}\phi_{1,i_1}\phi_{2,i_2}\dots\dots\dots\phi_{n-1,i_{n-1}}\,]_{,i_n}\\ &= e^{i_1\dots\dots i_n}\,[\phi_{1,i_1 i_n}\phi_{2,i_2}\dots\phi_{n-1,i_{n-1}}+\dots\dots+\\ &\qquad +\phi_{1,i_1}\phi_{2,i_2}\dots\dots\phi_{n-1,i_{n-1}i_n}\,]\\ &=[\sum_{i_1,i_n}\phi_{1,i_1 i_n}\sum_{i_2\dots i_{n-1}}e^{i_1\dots\dots i_n}\phi_{2,i_2}\dots\dots\phi_{n-1,i_{n-1}}\,]+\dots\dots\\ &\quad +[\sum_{i_{n-1}i_n}\phi_{n-1,i_{n-1}i_n}\sum_{i_1\dots\dots i_{n-2}}e^{i_1\dots\dots i_n}\phi_{1,i_1}\dots\dots\phi_{n-2,i_{n-2}}\,]\end{aligned}$$

سنبرهن أن مضمون كل قوس من الأقواس الأخيرة معدوم. من أجل قيم كيفية مثبتة للأدلة $(i_2\dots\dots i_{n-1})$ يحتوي القوس الأول على حدين متساويين بالقيمة المطلقة ومختلفين بالإشارة ، ويكتب بالشكل :

$$\in_1(\phi_{1,i_1 i_n}-\phi_{1,i_n i_1})(\phi_{2,i_2}\,\phi_{3,i_3}\dots\dots\dots\phi_{n-1,i_{n-1}})=0$$

حيث $\in_1=1$ إذا كان التبديل $(i_1 i_2\dots\dots i_n)$ زوجياً ، و $\in_1=-1$ إذا كان فردياً . وبما أن هذه النتيجة صحيحة من أجل كل تجزئة للمجموعة $(1\,2\dots\dots n)$ ، لذلك فإن القوس الأول معدوم . ونبرهن بالمثل على انعدام الأقواس الباقية . $(i_1 i_n)(i_2\dots\dots i_{n-1})$

ملاحظة : تكتب العبارة (12) على شكل معين

$$L=\frac{1}{\sqrt{g}}\begin{vmatrix}\phi_{1,1} & \phi_{1,2} & \cdots & \phi_{1,n}\\ \vdots & & & \\ \phi_{n-1,1} & \phi_{n-1,2} & & \phi_{n-1,n}\\ \dfrac{\partial}{\partial x^1} & \dfrac{\partial}{\partial x^2} & & \dfrac{\partial}{\partial x^n}\end{vmatrix} \tag{13}$$

حيث ينشر بشكل يُمثّل فيه الصغير الموافق لـ $\dfrac{\partial}{\partial x^i}$ المركبة ξ^i .

ملاحظة : إذا كانت التوابع ϕ_k في المبرهنة السابقة مرتبطة تابعياً فإن

$$rank(\frac{\partial\phi_k}{\partial x^i})<n-1 \qquad k\in[1,n-1],i\in[1,n]\,.$$

ويكون معين كل مصفوفة جزئية $(n-1)\times(n-1)$ من المصفوفة الأخيرة معدوماً . ولكن هذه المعينات ليست سوى مركبات الحقل L ، أي أن الحقل L يكون معدوماً.

مبرهنة 4 : إن كلاً من السطوح

$$\phi_k=C_k \tag{14}$$

سطح شعاعي للحقل L المعطى بالمعادلة (12).

برهان : تتعين خطوط الحقل L بحل جملة المعادلات التفاضلية العادية

$$(15) \qquad \frac{dx^1}{e^{i_1 \ldots i_{n-1} 1}\phi_{1,i_1}\ldots\ldots\phi_{n-1,i_{n-1}}}=\ldots\ldots=\frac{dx^n}{e^{i_1 \ldots i_{n-1} n}\phi_{1,i_1}\ldots\ldots\phi_{n-1,i_{n-1}}}$$

نضـــرب بسط ومقام النسبة الأولى بـــ $\phi_{1,1}$ والثانية بـــ $\phi_{1,2}$ .... والأخيرة بـــ $\phi_{1,n}$ ونجمع البسوط إلى بعضها والمقامات إلى بعضها فنجد أن المقام الناتج معدوم

$$e^{i_1 \ldots i_{n-1} k}\phi_{1,i_1}\ldots\ldots\phi_{n-1,i_{n-1}}\phi_{1,k} = \begin{vmatrix} \phi_{1,1} & \phi_{1,2} & \cdots & \phi_{1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \phi_{n-1,1} & \phi_{n-1,2} & \cdots & \phi_{n-1,n} \\ \phi_{1,1} & \phi_{1,2} & \cdots & \phi_{1,n} \end{vmatrix} = 0$$

والمعين معدوم نتيجة تساوي سطريه الأول والأخير. ينتج إذن أن البسط الموافق معدوم. أي أن $\phi_{1,k}dx^k = 0$ ، وبالتالي فان $\phi_1 = c_1$ تكامل لجملة المعادلات (13) . نبرهن بالمثل أن $\phi_k = c_k$ ، حيث $k \in [1, n-1]$ ، تكاملات للجملة.

ملاحظات .

1. رأينا انه توجد في M_2 عبارة عامة وحيدة (4) لحقل عديم الانضغاط ، وبتطبيق أي العبارات السابقة نحصل على (4).
2. بتطبيق العبارة العامة الثانية نحصل في M_3 على الحقل

$$L = g^{-1/2} \quad e^{ijk} B_{i,j} \quad \partial / \partial x^k$$

$$= g^{-1/2}[(B_{2,3} - B_{3,2})\partial / \partial x^1 + (B_{3,1} - B_{1,3})\partial / \partial x^2 + (B_{1,2} - B_{2,1})\partial / \partial x^3]$$

حيث B_1 و B_2 و B_3 توابع كيفية من الصف C^2 . تكافئ العبارة الأخيرة العبارة المألوفة $L = \nabla \times B$ في الفراغ الاقليدي منسوب إلى جملة مـــتعامدة . من اجل عبارات $\nabla \times B$ في الإحداثيات المتعامدة نرجع إلى (Spiegel, 1959). نحصل من تطبيق العبارة العامة الثالثة في M_3 على الحقل

$$L = g^{-1/2} e^{ijl} \phi_{,i} \psi_{,j} = g^{-1/2} \begin{vmatrix} \phi_{,1} & \phi_{,2} & \phi_{,3} \\ \psi_{,1} & \psi_{,2} & \psi_{,3} \\ \partial / \partial x^1 & \partial / \partial x^2 & \partial / \partial x^3 \end{vmatrix}$$

وهو يؤول عندما يكون الفراغ اقليدياً منسوباً إلى جملة ديكارتية متعامدة إلى $L = \nabla \phi \times \nabla \psi$.

3. تكـــافئ العـــبارة (12) لحقل غير قابل للانضغاط تشكيل جملة المعادلات التفاضلية التي تكاملاتها الأولية التوابع (11) ، وذلك بمفاضلة هذه التوابع وحساب $(n-1)$ تفاضلاً dx^i بدلالة أحد التفاضلات ولنقل dx^n، ثم كتابة الجملة بشكلها المتناظر.

4. مزيل انضغاط حقل

ليكن $K = \eta^i \, \partial / \partial x^i$ حقلاً شعاعياً من الصف C^1 في M_n . سنبين أنه توجد أسرة غير منتهية من الحقول غير القابلة للانضغاط والتي لها سطوح K الشعاعية نفسها ، ولكننا سنبدأ بتعريف عامل إزالة انضغاط حقل ، أو مزيل انضغاط حقل .

تعريف : نقول عن تابع مختلف عن الصفر $\mu(x^1, \ldots\ldots, x^n)$ ومن الصف C^1 في M_n إنه مزيل لانضغاط الحقل K إذا كان الحقل μK غير قابل للانضغاط ، ونقول آنئذ أن الحقل μK يرجع الحقل K .

يكون تابع μ مزيلاً لانضغاط الحقل K إذا وفقط إذا حقق المعادلة $div(\mu K) = 0$ ، وهي تكافئ أن $\mu divK + K\mu = 0$ ، أو

$$K\mu = -\mu divK. \qquad (16)$$

يتم اشتقاق معادلة مزيل الانضغاط (16) بسهولة ، انظر أيضاً المرجع (Abraham and Marsden,1978) الذي يعطي خواص المؤثر div . إن لمعادلة مزيل الانضغاط شكل معادلة لاغرانج ، والجملة التفاضلية المساعدة المتعلقة بها هي

$$\frac{dx^1}{\eta^1} = ... = \frac{dx^n}{\eta^n} = \frac{d\mu}{-\mu divL} \qquad (17)$$

سنرمز لمجموعة الحقول غير القابلة للانضغاط والناتجة عن K بضربه بمزيل انضغاط μ بالرمز $L(\mu,K)$ ، أي أن $L(\mu,K)$ هي مجموعة الحقول التي ترجع K، كما نرمز لحقل معين منها بالرمز $L_\mu(K)$.

مبرهنة 5 . لجميع الحقول التي ترجع K سطوح الشعاعية نفسها .

برهان : ينتج من ملاحظة أ ن السطوح الشعاعية لهذه الحقول شأنها شأن K تتعين بالنسب الـ n الأولى في الجملة التفاضلية (17).

ملاحظة : تصح المبرهنة السابقة من أجل كل حقل من الشكل λK حيث λ تابع ما مختلف عن التابع الصفر ، وسواء كان هذا الحقل يرجع K أو لا يرجعه .

لتكن

$$\phi_k(x^1,......,x^n) = C_k \qquad k \in [1, n-1] \qquad (18)$$

تكاملات أولية للجملة (17) مستقلة تابعياً حاصلة من النسب الـ n الأولى ، فيكون أعم تكامل للجملة المساعدة المرتبطة بـ K من الشكل $f(\phi_1,........,\phi_{n-1})$ ، حيث f تابع كيفي في التوابع ϕ_k ، وبالتالي فإن كل سطح شعاعي للحقل K له الشكل

$$f(\phi_1,..........,\phi_{n-1}) = 0 \qquad (19)$$

مبرهنة 6. إذا كان μ_1 و μ_2 مزيلين لانضغاط الحقل K، وكانا مستقلين خطياً ، فإن μ_1/μ_2 تكامل للحقل K.

رهان : من معادلة مزيل الانضغاط (16) نجد $\mu_2 K\mu_1 = \mu_1 K\mu_2$ ، وبالتالي فإن

$$K(\mu_1/\mu_2) = \mu_2^{-2}(\mu_2 K\mu_1 - \mu_1 K\mu_2) = 0$$

و μ_1/μ_2 تكامل للجملة المساعدة المتعلقة بالحقل K . وينتج من هذا أن $\mu_1/\mu_2 = c$ ، حيث c ثابت كيفي ، سطح شعاعي للحقل K.

مبرهنة 7 . إذا كان μ مزيلاً لانضغاط الحقل K فإن جميع مزيلات انضغاطه تعطى بالعلاقة

$$M = \mu f(\phi_1,........,\phi_{n-1}) \qquad (20)$$

حيث f تابع كيفي من الصف C^1 في التوابع ϕ_k .

برهان : ليكن M مزيل انضغاط للحقل K ، فيكون M/μ حسب المبرهنة السابقة تكاملاً للجملة المساعدة المرتبطة بالحقل K ، وبالتالي فله الشكل

$$M/\mu = f(\phi_1,..........,\phi_{n-1})$$

به يتم البرهان .

يمكن التحقق بسهولة أن M المعطى بـ (20) يزيل انضغاط الحقل K ، ويكفي أن نثبت أن معادلة المزيل (16) محققة به . وبالفعل فإن

$$(\mu f)divK+K(f\mu)=\mu f\,divK+f\,K\mu+\mu K f$$
$$=f(\mu div K+K\mu)+0 \quad (\text{لأن } Kf=0).$$

وينعدم الطرف الأخير استناداً إلى معادلة المزيل (16).

ينتج من المبرهنة (7) أنه إذا كان الحقل K بالأصل غير قابل للانضغاط ، فإن أي مزيل لانضغاطه يكون من الشكل $M=f(\phi_1,\ldots\ldots\ldots\ldots,\phi_{n-1})$.

نذكر أخيراً أنه برغم وجود أسرة غير منتهية من الحقول $L(\mu,K)$ التي لها سطوح K الشعاعية نفسها ، فإن المنحنيات التكاملية لهذه الحقول متمايزة عن بعضها بداهة ، وبالفعل فإن معادلات المنحنيات التكاملية لحقل μK ، وهي

$$dx^i=\mu\eta^i dt \qquad i\in[1,n], \tag{21}$$

حيث t وسيط حقيقي ، يتعلق بالتابع μ .

ملاحظة: إن النتائج المتعلقة بعوامل إزالة الانضغاط والناتجة عن المعادلة التفاضلية (16) هي حالات نموذجية من خواص عامة تتمتع بها حلول معادلة لاغرانج تامة الخطية التي درست تحليلياً في (Viazminsky, 1999a,1999b)، ودرست جبرياً في (Viazminsky, 2000b).

4. طرق في إيجاد مزيلات الانضغاط وعبارتها العامة

1- إذا أمكن إيجاد تكامل أولي للجملة (17) يحوي μ وأمكن حله بالنسبة إلى μ فنجد أحد المزيلات المطلوبة. وإذا توفر إضافة إلى ذلك $(n-1)$ تكاملاً ϕ_k للجملة المساعدة المتعلقة بالحقل K فإن كل مزيلاته تعطى بالعلاقة (20) سنفرض فيما يلي أن التكاملات ϕ_k متوفرة لدينا .

2- بما أن التكاملات ϕ_k للحقل K هي نفسها تكاملات لكل حقل غير قابل للانضغاط $L=\mu K$ فنقوم بتعيين أحد هذه الحقول وليكن $L=\xi^r\,\partial/\partial x^r$ وذلك بالاستفادة من العبارة (12) التي تعين حقلاً غير قابل للانضغاط بدلالة سطوحه الشعاعية . وعلى فرض أن المركبة η^r للحقل K غير معدومة فإن

$$\mu=\xi^r/\eta^r=e^{i_1\ldots\ldots\ldots i_{n-1}r}\phi_{1,i_1}\ldots\ldots\ldots\ldots\phi_{n-1,i_{n-1}}/\eta^r \tag{22}$$

زيل لانضغاط الحقل K .

- بفرض أن

$$rank(\partial\phi^k/\partial x^j)=n-1 \qquad k,j\in[1,n-1] \tag{23}$$

يمكن حل جملة المعادلات (18) من أجل $(x^1,\ldots\ldots\ldots\ldots,x^{n-1})$ بدلالة $(c_1,\ldots\ldots\ldots,c_{n-1},x^n)$:

$$x^k=x^k(c_1,\ldots\ldots,c_{n-1},x^n) \qquad (k=1,\ldots\ldots,n-1). \tag{24}$$

إذا استطعنا الحصول على هذا الحل ، فنعوض (24) في النسبتين الأخيرتين من (17) ونفصل المتحولات ونكامل فنجد

$$\mu=c_n e^{-\int\frac{div L}{\eta^n}dx^n}=c_n e^{-F(c_1,\ldots\ldots\ldots,c_{n-1},x^n)} \tag{25}$$

وبالتعويض في النتيجة الأخيرة من أجل c_1 c_{n-1} , ... , من (24) نجد التكامل الـ n للجملة التفاضلية (17)

$$\mu(x^1,\dots\dots,x^n)=c_n\, e^{-F(\phi_1,\dots\dots,\phi_{n-1},x^n)}, \qquad (26)$$

هو في الوقت نفسه مزيل انضغاط للحقل K ، وتكون بالتالي العبارة العامة لمزيلات انضغاط الحقل K هي

$$\mu=f(\phi_1,\dots\dots,\phi_{n-1})e^{-F}\ . \qquad (27)$$

6. مزيلات الانضغاط وعوامل التكميل في منوعة ثنائية البعد

في منوعة M_2 بإحداثيات (x,y) يكون حقل

$$L=\xi\partial/\partial x+\eta\partial/\partial y \qquad (28)$$

غير قابل للانضغاط إذا وفقط إذا كانت المعادلة

$$\sqrt{g}\eta\, dx-\sqrt{g}\xi\, dy=0 \qquad (29)$$

ينتج من الفقرة المتعلقة بمنوعة ثنائية البعد في البند 2 أن تابعاً μ يكون مزيلاً لانضغاط الحقل (28) إذا وفقط إذا كان عامل تكميل للمعادلة (29)، أي إذا وفقط إذا كان $\mu\sqrt{g}$ عامل تكميل للمعادلة

$$\eta dx-\xi dy=0. \qquad (30)$$

تنطبق معادلة مزيل الانضغاط (17) في M_2 مع معادلة عوامل تكميل المعادلة (29)، وفي الحالة التي تكون فيها M_2 إقليدية والإحداثيات (x,y) ديكارتية فان معادلة مزيل الانضغاط تنطبق مع معادلة عوامل تكميل المعادلة (30). من أجل عوامل التكميل ومواضيع المعادلات التفاضلية الأخرى المستعملة في هذا البحث نرجع إلى (Ayres, 1952; Viazminsky, 1995).

7. تطبيق : الحقول المركزية

لتكن المنوعة M_n الفراغ الاقليدي الثلاثي E_3 مزوداً بالإحداثيات الديكارتية $\vec{r}=(x^1=x,x^2=y,x^3=z)$. نقول عن حقل $K=\eta^i\,\partial/\partial x^i$ إنه مركزي إذا كانت خطوطه مستقيمات عبر المبدأ ، ونقول عنه إنه متناظر مركزياً إذا أمكن رده إلى الشكل $K=\eta(r)\,\partial/\partial r$ ، حيث $r=|\vec{r}|$. ومن الواضح أن كل حقل متناظر مركزياً هو حقل مركزي . لنعتبر الحقل المتناظر مركزياً

$$K=x\partial/\partial x+y\partial/\partial y+z\partial/\partial z. \qquad (e1)$$

بملاحظة أن $divK=3$ تكون معادلة المزيل

$$K\mu+3\mu=0, \qquad (e2)$$

والجملة المساعدة المرتبطة بها هي

$$x^{-1}\,dx=y^{-1}\,dy=z^{-1}\,dz=-\mu^{-1}\,d\mu/3 \qquad (e3)$$

من (e3) نلاحظ مباشرة أن كلاً من $\mu_1=x^{-3}$, $\mu_2=y^{-3}$, $\mu_3=z^{-3}$ مزيلات لانضغاط K . ينتج إذن أن $\mu_1/\mu_2=y^3/x^3, \mu_1/\mu_3=z^3/x^3$ تكاملان للجملة المساعدة المتعلقة بالحقل K ، ويعطى بالتالي كل سطح شعاعي للحقل K بالعبارة

$$f(y/x\,,z/x)=0 \qquad (e4)$$

حيث f تابع كيفي . وحسب (20) فإن العبارة العامة للمزيل هي

$$\mu=x^{-3} f(y/x,z/x) \qquad (e5)$$

يمكن اختيار f حيث ينتج المزيل $\mu_4=(xyz)^{-1}$ أو $\mu_5=(x^2+y^2+z^2)^{-3/2}$. تعطى السطوح الشعاعية للحقول $\mu_i K$ $(i=1,...,5)$ بالعبارة (e 4) ، وهي تدل على أن المحلات الهندسية لخطوط أي من هذه الحقول مستقيمات عبر المبدأ ، وهي بالتالي مركزية . بكتابة K بالشكل $K=r\partial/\partial r$ نستنتج أن حداءه بأي مزيل مذكور آنفاً ، باستثناء μ_5 ، ليس متناظراً مركزياً ، وأما $\mu_5 K=r^{-2}\partial/\partial r$ فهو متناظر مركزياً .

يمكن أيضاً أن نبدأ بايجاد عبارة التكامل العام (e4) ، وننشئ حقلاً غير قابل للانضغاط $L=\xi^i\partial/\partial x^i$ بالعبارة (12). إن المركبة الأولى للحقل L هي

$$\xi^1=e^{ij1}\phi_{,i}\psi_{,j}=\phi_{,2}\psi_{,3}-\phi_{,3}\psi_{,2}=x^{-2}$$

حيث $\psi=z/x,\phi=y/x$. وحسب (22) فإن $\mu=\xi^1/\eta^1=x^{-2}/x=x^{-3}$ مزيل لانضغاط K ، وهو ما وجدناه بطريقة أخرى .

تعطى المنحنيات التكاملية للحقل K بالجملة المساعدة $dx^i=x^i dt$ ، ومنها نجد $x^i=x_0^i e^t$ ، حيث إن $x^i(t=0)=x_0^i$.

يمكن كتابة معادلة المنحنيات التكاملية بالشكل $\vec{r}=\vec{r}_0 e^t$ وهي تمثل مستقيمات عبر المبدأ ، وتدل على أن كل نقطة $\vec{r}_0$ من E_3 تسعى على مسارها المستقيم إلى اللانهاية لما $t\rightarrow\infty$ ، وتسعى إلى المبدأ لما $t\rightarrow-\infty$. ومن السهل التحقق أن التحويلات $\{U_t:U_t:E_3\rightarrow E_3,t\in R\}$ والمعرفة بالشكل $U_t(\vec{r}_0)=\vec{r}_0 e^t\ (\forall\vec{r}_0\in E_3)$ تؤلف زمرة وحيدة الوسيط من التحويلات لـ E_3 .

نعتبر الآن الحقل المتناظر مركزياً $\mu_5 K=r^{-2}\partial/\partial r$. إن المنحنيات التكاملية لهذا الحقل هي

$$r = r_0 / (1 - r_0\, t) \ ,\ \varphi = \varphi_0 \ ,\ \theta = \theta_0 \qquad (e6)$$

بما أن $r\geq 0$ فإن $t<1/r_0$ ، وعندما $t\rightarrow 1/r_0$ فإن $r\rightarrow\infty$ ، وعندما $t\rightarrow-\infty$ فإن $r\rightarrow 0$. وبعبارة ثانية فإن كل نقطة (r_0,φ_0,θ_0) تنتقل بتأثير التحويل (e6) على مسار مستقيم $(\varphi=\varphi_0\ ,\ \theta=\theta_0)$ منبثقة من المبدأ عندما $t=-\infty$ لتشغل الموضع (r_0,φ_0,θ_0) في اللحظة $t=0$ وتبتعد عندما $t\rightarrow 1/r_0$ إلى اللانهاية.

يوضح هذا المثال أنه برغم أن المسارات الهندسية للمنحنيات التكاملية للحقل K ولكل حقل يرجعه متطابقة فإن الطريقة التي تمسح بها النقطة مسارها تختلف من حقل إلى آخر

8. ملاحظة حول البنية الجبرية للحقول غير القابلة للانضغاط

لنرمز لمجموعة الحقول الشعاعية من الصف C^∞ على M بالرمز Γ . يؤلف Γ جبر لي (Bishop and Goldberg, 1968) بالنسبة لعمليات الجمع والضرب السلمي الحقيقي والمبادل أو قوس لي (Lee bracket or commutator) ، والتي نعرفها بدلالة الإحداثيات كما يلي : إذا كان $L=\xi^i\partial/\partial x^i\ ,L_1=\eta^i\partial/\partial x^i\in\Gamma$ فإن

$$L+L_1=(\xi^i+\eta^i)\partial/\partial x^i\ ,cL=c\xi^i\partial/\partial x^i\quad(c\in\Re\ )$$

$$[L,L_1]=LL_1-L_1L=\xi^i\eta^j_{,i}\partial/\partial x^j-\eta^j\xi^i_{,j}\partial/\partial x^i$$

$$=(\xi^j\eta^i_{,j}-\eta^j\xi^i_{,j})\partial/\partial x^i$$

ومن الواضح أن موضوعات الفراغ الشعاعي محققة وأن [,] مبادل على Γ .

لتكن $\Sigma \subset \Lambda$ مجموعة الحقول غير القابلة للانضغاط. سنبرهن أن Σ جبر جزئي من Γ . وبالفعل وإذا كان $L, L_1 \in \Sigma$ فإن

$$div(L + L_1) = divL + divL_1 = 0, \quad div(cL) = c\, divL = 0$$

وبالتالي فإن Σ فراغ شعاعي حزئي من الفراغ الشعاعي Γ . ثم إن (Abraham and Marsden , 1978)

$$div[L, L_1] = L\, divL_1 - L_1 divL$$

بالتالي فإن $div[L, L_1] = 0$. وبناء عليه فان Σ جبر جزئي من جبر لي Γ .

تكن $\Gamma \supset \Xi$ مجموعة حقول كيلينغ (Killing fields) في M . بفرض أن Ξ غير خالية فإنها تؤلف جبر لي جزئياً من الجبر Γ (Wan and Viazminsky, 1979). وبما أن تفرق كل حقل كيلينغ معدوم (Eisenhart , 1964; Viazminsky, 1994) فنستنتج أن $\Sigma \supset \Xi$. وهكذا برهنا أن مجموعة الحقول الشعاعية غير القابلة للانضغاط والتي تتصف بأنها C^∞ في M تؤلف جبر لي جزئياً من جبر لي المكون ن جميع الحقول الشعاعية C^∞ في M ، وان هذا الجبر يحوي جبر لي المؤلف من حقول كيلينغ من الصف C^∞ في M.

References;

Abraham R. and **Marsden J. E.** (1978) Foundation of Mechanics. The Benjamin-Cummings Publishing Company, Reading.

Ayres Frank (1952) Differential Equations. Schaum's Outline Series, McGraw-Hill.

Bishop L and **Goldberg S. I.** (1968) Tensor Calculus on Manifolds. The Macmillan Company Press. New York and London.

Eisenhart L. (1964) Riemannian Geometry. Princeton University Press, Princeton.

Landau L. and **Lifshitz E. M** (1980) The Classical Theory of Fields. Chapman and Hall, London.

Lawden F. D. (1975) An Introduction to Tensor Calculus and Relativity. Pergamon Press, Oxford.

Loomis L. H. and **Sternberg S.** (1968) Advanced Calculus. Addison-Wesley Publishing Company, London.

Mackey G. W. (1963) Mathematical Foundations of Quantum Mechanics. Benjamin-Cummings, Reading.

Matsushita Y. (1972) Differentiable Manifolds. Marcel Dekker Inc., New York.

Spiegel R. Murray (1959) Vector Analysis. Schaum's Outline Series, McGraw-Hill.

Viazminsky C. P. (1994) Research Journal of Aleppo University **17**.

Viazminsky C. P. (1995) Ordinary and Partial Differential Equations. The Arab Centre for Authorship, Translation and Publication, Damascus.

Viazminsky C. P. (1998) Journal of Damascus University for Basic Science **14**.

Viazminsky C. P. (1999a) Los Alamos National Laboratory, xxx.lanl.gov, math.FA/9906085.

Viazminsky C. P. (1999b) Los Alamos National Laboratory, xxx.lanl.gov, math-ph/9906006.

Viazminsky C. P. and **Vary J. P.** (2000a) Research Journal of Aleppo University, **32**.

Viazminsky C. P. (2000b) Hadronic Journal , **23**.

Wan K. and Viazminsky C. (1979) Journal of Physics A **12**.

(Receieved 10/01/1999, in revised form 05/02/2001)